САНКТ - ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

НИКОЛАЙ ЕФИМОВИЧ
КИРИН

Сборник статей под редакцией
проф. В.В. Жука и проф. В.Ф. Кузютина

Санкт - Петербург
2003

УДК 517.91 + 519.2 + 338.l24
ББК 22.161.61 + 22.172.8 + 65.261.4
П 77

Рецензенты:
Д-р физ.-мат. н., проф. Матвеев Н.М.
Д-р физ.-мат. н., проф. Камачкин А.М.

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ)

Оригинал макет подготовлен к.ф.-м.н., доц. Поиставко В.Т.

П 77

Николай Ефимович Кирин.

Сборник статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина.– СПб: НИИ Химии СПбГУ, 2002.– 255 с.

ISBN 5-7997-0341-3

В монографии
Монография предназначена для .....
Библиогр. 265 назв. Табл. 29. Илл. 13.

ISBN 5-7997-0341-3

От редактора

Имеется электронная версия. Сборник и ее макет выполнены в издательской системе LaTeX.

Содержание

РАЗДЕЛ I

1. Краткая характеристика научной и педагогической деятельности Н.Е. Кирина

2. Творческое наследие Н.Е. Кирина (обзорные статьи)

1. КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА*
НАУЧНОЙ И ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ
Н.Е. КИРИНА

Кирин Николай Ефимович родился 21 декабря 1939 года в селе Лешуконское Лешуконского района Архангельской области в семье сельских учителей средней школы. Отец, Ефим Яковлевич, и мать, Клавдия Павловна, в 1937 году окончили физико - математический факультет Вологодского учительского института, отец продолжал учебу заочно в педагогическом институте. Он закончил его после войны и был распределен на работу преподавателем этого же института по кафедре математического анализа. Оба родителя были из незажиточных крестьянских семей (соответственно в Архангельской и Вологодской областях), рано потерявших отцов.

В дальнейшем Ефим Яковлевич закончил заочную аспирантуру под научным руководством академика В.В. Новожилова и защитил кандидатскую диссертацию по теории упругих оболочек.

В 1957 году Николай Ефимович с золотой медалью окончил среднюю школу №9 г. Вологды и в том же году поступил на математико - механический факультет Ленинградского государственного университета. Его дальнейшая трудовая деятельность достаточно полно отражена в следующей таблице.

Месяц и год		Должность с указанием предприятия,учреждения, организации, а также министерства (ведомства)	Место нахождение предприятия учреждения, органиации
Посту-пления	ухода		
09 1957	07 1962	Студент математико-механического факультета Ленинградского государственного университета, Министерство высшего образования РСФСР	Ленинград
10 1962	12 1964	Аспирант математико-механического факультета Ленинградского государственног университета	Ленинград
01 1965	03 1966	Младший научный сотрудник Вычислительного центра Ленинградского государственного университета	Ленинград

Продолжение таблицы см. на следующей странице.

*). В основу положены официальные материалы.
Составители В.В. Жук, В.Ф. Кузютин.

04 1966	11 1967	Старший научный сотрудник Вычислительного центра Ленинградского государственного университета	Ленинград
11 1967	06 1968	Старший преподаватель кафедры теории управления математико-механического факультета Ленинградского государственного университета	Ленинград
06 1968	02 1972	Доцент кафедры теории управления математико-механического факультета Ленинградского государственного университета	Ленинград
02 1972	07 1974	Доцент кафедры высшей математики факультета прикладной математики - процессов управления Ленинградского государственного университета	Ленинград
07 1974	12 1986	Профессор, заведующий кафедрой численного анализа факультета прикладной математики - процессов управления Ленинградского государственного университета	Ленинград
01 1987	15.5 2000	Заведующий кафедрой информационных систем факультета прикладной математики-процессов управления Ленинградского / Санкт-Петербургского государственного университета Министерства общего и профессионального образования Российской Федерации	Ленинград Санкт--Петербург

С 1961 года судьба Николая Ефимовича была связана с научной школой математической теории устойчивости и управления, возглавляемой профессором В.И. Зубовым. Под научным руководством Владимира Ивановича он защитил дипломную работу “Один метод решения задачи линейного быстродействия". После окончания с отличием в 1962 году университета был принят в аспирантуру, которую завершил досрочно защитой кандидатской диссертации на тему “Один метод программной оптимизации в системах управления"в 1964 г. В 1974 году Николай Ефимович защитил докторскую диссертацию “Итеративные методы оптимизации управляемых систем"по специальности 01.01.09 - математическая кибернетика. Диплом доктора физико-математических наук он получил в 1977 году, а в 1978 году стал профессором по кафедре численного анализа.

Н.Е. Кирин принимал активное участие в создании нового факультета прикладной математики - процессов управления (ПМ-ПУ)

Ленинградского государственного университета. В частности, он был ученым секретарем временного учебно-методического совета, созданного в 1969 году по приказу министерства ВССО РСФСР для организации учебной работы на открывшемся тогда новом факультете.

Николай Ефимович был известным специалистом в стране и за рубежом в области математической теории управления и методов оптимизации. В начале 60-х годов им был предложен метод нового типа в решении вариационной задачи о быстродействии, послужившей началом направления в разработке алгоритмов решения задач оптимизации управляемых систем и смежных вопросов оценивания функционалов на дифференциально-разностных и интегральных включениях. Н.Е. Кириным опубликовано свыше 100 научных работ, включая 6 монографий и 7 учебных пособий, отражающих достижения автора в разработке численных методов поиска экстремума функций, математических методов анализа и синтеза управляемых систем. В 1977 году за цикл работ по численным методам оптимизации управляемых систем он был удостоен премии Ленинградского университета.

Научные результаты Кирина Н.Е. с 1963 года использовались при выполнении большого числа разработок, проводившихся в Ленинградском университете по заказам организаций и прдприятий министерства судостроения, министерства общего и среднего машиностроения. С 1973 по 1990 год Н.Е. Кирин был научным руководителем важнейших тем по заказам ВПК при СМ СССР. За успешное выполнение одной из таких тем он был отмечен премией СМ СССР (1986). В 1995 - 1997 годах он был научным руководителем проекта, получившего поддержку РФФИ. Н.Е. Кирин являлся одним из ведущих специалистов научной школы по теории устойчивости и управления в С.-Петербургском университете: он был заместителем председателя диссертационного совета при факультете ПМ - ПУ, членом методической комиссии университета и факультета ПМ - ПУ, членом нескольких диссертационных советов.

Как преподаватель и заведующий кафедрой Н.Е. Кирин читал общие и специальные курсы учебного плана по специальности “Прикладная математика”: “Методы вычислений”, “Математический анализ”, “Вычислительные методы теории оптимального управления (Математические основы кибернетики)”. Он руководил методической работой по циклу дисциплин. связанных с методами алгоритмизации решения прикладных задач. Вместе с другими учеными он активно участвовал в развитии математических школ по новым напрвалениям прикладной математики в Мордовском, Ашхабадском и Самаркандском университетах. Занимался пропагандой научных знаний, регулярно выезжая с циклами лекций в переферийные ВУЗы бывших Союзных республик, в республику Куба, приобретая новых учеников и последователей. Регулярно выступал на всесоюзных и международных научных конференциях и симпозиумах, сделав на них более 30 научных сообщений. Был членом оргкомитета первой (1994) и второй (1996) международной конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения”. Под научным руководством профессора Н.Е. Кирина получили специализацию более 100 специалистов высшей квалификации. Среди его учеников 19 кандидатов наук и 4 доктора наук.

Со студенческих лет Н.Е. Кирин активно участвовал в общественной жизни, работая в профсоюзных, партийных структурах и органах народного контроля университета. С 1972 по 1982 год Николай Ефимович занимал высокий в те времена пост секретаря партийной организации факультета.

Научная, педагогическая и общественная деятельность Н.Е. Кирина неоднократно отмечалась благодарностями в приказах ректора университета, премиями и наградами. Он награжден юбилейной медалью “За доблестный труд, в ознаменование 100-летия со дня рождения В.И. Ленина” (1970), медалью “Ветеран труда”. В 1999 году ему присуждено звание “Заслуженный деятель науки Российской Федерации”. Н.Е. Кирин включен в библиографию “Математика в СССР 1958 - 1967 гг.”, т.2, выпуск 1, издательство “Наука”, 1969.

15 мая 2000 года Николай Ефимович Кирин трагически погиб.

СПИСОК КАНДИДАТОВ НАУК,

ЗАЩИТИВШИХ ДИССЕРТАЦИИ ПОД НАУЧНЫМ РУКОВОДСТВОМ

КИРИНА Н.Е.

	ФИО	**год защиты**
1	Бабкин Анатолий Григорьевич	1975
2$\wedge$	Приставко Владислав Тарасович	1978
3$*$	Летавин Михаил Иванович	1979
4$*$	Морозкин Николай Данилович	1981
5$\wedge$	Балин Евгений Аркадьевич	1982
6	Иванов Анатолий Петрович	1982
7$*$	Заика Юрий Васильевич	1985
8	Затевахин Александр Валентинович	1987
9$\wedge$	Карпов Андрей Михайлович	1987
10	Садовин Николай Степанович	1987
11	Олемской Игорь Владимирович	1988
12	Халбаев Азамат Юсуфович	1988
13$\wedge$	Шатохина Ольга Ильинична	1988
14$\wedge$	Караева Таисия Канаматовна	1990
15	Ермеккалиев Кенес	1991
16	Каменев Владимир Викторович	1991
17	Рустамов Мухаммади Джабарович	1991
18	Шахидзе Анастас Николаевич	1991
19	Сауханова Жанат Сергазовна	1992
20	Остов Юрий Яковлевич	1993
21$\wedge$	Едаменко Николай Семёнович	1994
22$\wedge *$	Lelis Raul Vaillant Pascual	1995
23	Хафизова Ильгиза Наильевна	1998

$*$ - лица, защитившие докторские диссертации по темам, развивающим темы кандидатских диссертаций.

$\wedge$ - совместное руководство.

ХРОНОЛОГИЧЕСКИЙ СПИСОК* ТРУДОВ НИКОЛАЯ ЕФИМОВИЧА КИРИНА

1. *Кирин Н.Е.* Об одном численном методе в задаче о линейных быстродействиях // Методы вычислений. Л., 1963. С. 67-74.

2. *Кирин Н.Е.* К решению общей задачи линейного быстродействия // Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25. №1. С. 16-22.

3. *Кирин Н.Е.* Программная оптимизация линейных систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1965. Т. 26. №1. С. 3-10.

4. *Кирин Н.Е.* Алгоритмическое описание работы вычислительной машины в некоторых оптимальных системах // Тр. междунар. конфер. по многомерн. и дискрет. системам автомат. управления. Сер. А. Прага. 1965. С. 98-100.

5. *Кирин Н.Е.* К численному решению общей задачи математического программирования // Докл. АН УзАССР. 1965. №6. С. 5-8.

6. *Кирин Н.Е.* Один итеративный метод в решении экстремальных задач // Автоматика и телемеханика. 1966. Т. 27. №10. С. 3-12.

7. *Кирин Н.Е.* Об одном численном методе в общей задаче математического программирования // Прикладные задачи техн. кибернетики. Сов. радиол. М., 1966. С. 369-374.

8. *Кирин Н.Е.* Некоторые численные методы программной оптимизации // Зубов В.И. Теория оптимального управления. Л., 1966. С. 288-298.

9. *Кирин Н.Е.* К программной оптимизации линейных систем с учетом ограничений на фазовые координаты // Оптимальные системы, статистические методы. М., 1967. С. 92-98.

10. *Кирин Н.Е.* Вычислительные методы в теории оптимального управления. Л., 1968. 144 с.

11. *Иванов А.П., Кирин Н.Е.* К методам наблюдения линейных возмущаемых систем // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10. №5. С. 788-791.

12. *Кирин Н.Е.* К задаче синтеза на основе итеративных методов построения оптимальных траекторий // Тр VI всесоюзн. совещан. по пробл. управл. М., 1974. С. 81-84.

13. *Бабкин А.Г., Кирин Н.Е.* Итеративные методы в задаче синтеза систем управления // Автоматика и телемеханика. 1975. Т. 36. №10. С. 12-17.

*). Составлен М.И. Летавиным.

14. *Кирин Н.Е.* Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. Л., 1975. 160 с.

15. *Кирин Н.Е.* Оценочные системы управления // IV Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики. Тезисы докладов. Новосибирск, 1977. С. 54-56.

16. *Кирин Н.Е.* Об оценке наименьшей области удержания управляемой системы // Вопр. механики и процессов управления. Вып. 2. Л., 1978. С. 125-129.

17. *Кирин Н.Е.* О некоторых подходах к решению уравнений // Некотор. вопросы качеств. теор. дифференц. ур-ний, теор. управл. движением. Саранск, 1979. С. 54-57.

18. *Кирин Н.Е., Морозкин Н.Д.* Нелинейные оценки экстремальных траекторий. // Оптимальное управление в механических системах. Тезисы III Всесоюзной конференции. Киев, 1979. С. 228.

19. *Белин Е.А., Кирин Н.Е., Сейсов Ю.Б.* Об оценке локальной оптимальности траекторий управляемых систем // Изв. АН Тур.ССР, сер. физ.-тех., хим., геол. наук. 1980. №2. С. 10-13.

20. *Байдаев В.Н., Кирин Н.Е., Нелепин Р.А.* Построение области притяжения по методу В.И. Зубова // Дифференц. ур-ния. 1981. Т. 17. №8. С. 1347-1361.

21. *Олейников В.А., Кирин Н.Е., Григорян В.Г.* Численные методы оптимального управления. Учебное пособие. Л., 1982. 65 с.

22. *Кирин Н.Е., Остов Ю.Я.* Об одном методе оценки субоптимального управления // Управление динамическими системами. Деп. ВИНИТИ 03.11.83. №5942. 7 с.

23. *Кирин Н.Е., Морозкин Н.Д.* Об одном методе проверки экстремальных траекторий на оптимальность // Некотор. вопросы качеств. теории дифф. ур-ний и теор. управл. движением. Саранск, 1983. С. 112-118.

24. *Кирин Н.Е.* Сопряженная задача наблюдаемости нелинейных систем // Управление динамическ. системами. Деп. ВИНИТИ 03.11.83. №5942. С. 36-40.

25. *Кирин Н.Е.* К теории наблюдаемости и прогнозирования в нелинейных управляемых системах // Управление, надежность, навигация. Саранск, 1984. С. 130-136.

26. *Кирин Н.Е., Садовин Н.Г.* Численные методы последовательных улучшений программных управлений. // V Всесоюзная конференция по управлению в механических системах. Тезисы докладов. Казань, 1985. С. 42.

27. *Кирин Н.Е.* К теории методов оценивания в динамических системах // Вопросы механики и процессов управления. Вып. 8. 1986. С. 118-125.

28. *Бетанкурт Р.Р., Кирин Н.Е.* Математические задачи программной оптимизации управления процессом кристаллизации // Управление динамическими системами. Якутск, 1986. С. 48-58.

29. *Веденяпина С.И., Кирин Н.Е.* Интерполяционный метод высокого порядка одномерного поиска минимума // Динамика систем и управление. МордГУ. Саранск, 1986. С. 63-69.

30. *Иванов А.П., Кирин Н.Е., Устинов В.Л.* Сопряженные задачи в проблеме наблюдаемости линейных систем с распределенными параметрами // Динамика систем и управление. МордГУ. Саранск, 1986. С. 69-75.

31. *Кирин Н.Е., Халбаев А.Ю.* Наблюдаемость компонент динамических систем на переменном интервале // Математические методы управления и обработки данных. Рязань, 1986. С. 44-48.

32. *Исраилов И., Кирин Н.Е.* Оценочные системы теории управления. Тексты лекций, часть I. Самарканд, 1986. 32 с.

33. *Кирин Н.Е.* Сопряжённые задачи управления в динамических системах // Тезисы докладов Всесоюзной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения". Ашхабад, 1986. С. 95.

34. *Кирин Н.Е.* Динамическое программирование по обратной связи // Качеств. и асимпт. методы интегрирования возмущ. дифф. уравнений. Саранск, 1987. С. 129-133.

35. *Исраилов И., Кирин Н.Е., Шахидзе А.Н.* Дискретная модификация одного двойственного алгоритма в задаче линейного быстродействия // Деп. УзВИНИТИ 05.01.87 №560-Уз. 8 с.

36. *Исраилов И., Кирин Н.Е.* Оценочные системы теории управления. Тексты лекций, часть II. Самарканд, 1987. 28 с.

37. *Заика Ю.В., Кирин Н.Е.* Сопряженные задачи идентификации динамических систем // Дифф. ур-ния. 1988. Т. 24. №5. С. 770-776.

38. *Кирин Н.Е.* Метод последовательного демпфирования в задаче управления по обратной связи // Методы теории дифф. ур-ний и их приложения. Деп. ВИНИТИ 22.06.88 №4892-В88. С. 208-214.

39. *Исраилов И., Кирин Н.Е., Рустамов М.* Задачи наблюдаемости процесса нагрева // Вопросы вычислит. и прикладной математики. Вып. 84. Ташкент, 1988. С. 59-66.

40. *Кирин Н.Е.* Сопряженные задачи построения оптимальных квадратурных формул на интегральных многообразиях // Методы оптимизации и их приложения. Иркутск, ИрГУ. 1988. С. 290-295.

41. *Кирин Н.Е., Халбаев А.Ю.* Наблюдаемость компонент динамических систем с запаздывающим аргументом // Методы теории дифф. ур-ний и их приложения. Саранск, 1988. С. 45-51.

42. *Кирин Н.Е., Рустамов М.* К задаче наблюдения процесса нагрева тел. Деп. УзНИИНТИ 13.09.88 №40-Уз88. 8 с.

43. *Кирин Н.Е., Садовин Н.С.* Интерполяционный метод последовательного демпфирования в нелинейной задаче управления нагревом // Вычислительная и прикладная математика. Уфа, 1988. С. 45-55.

44. *Кирин Н.Е., Садовин Н.С.* Интерполяционный подход в методах последовательного улучшения программных траекторий // Вопросы оптимального управления и исследования операций. Иркутск, ИрГУ. 1988. С. 47-53.

45. *Кирин Н.Е., Халбаев А.Ю.* Синтез управления по части переменных // Динамические системы и управление. Саранск, 1988. С. 52-57.

46. *Кирин Н.Е., Рустамов Р.* К задаче наблюдения процесса диффузии. Деп. УзНИИНТИ 01.12.88 №885-Уз88. 5 с.

47. *Иванов А.П., Кирин Н.Е.* Сопряженные задачи теории управления. Учебное пособие. Л., 1988. 89 с.

48. *Кирин Н.Е.* Метод последовательного демпфирования в задаче управления по неполной обратной связи // Вестник ЛГУ, сер. А, матем., мех., астр. 1989. Вып. 2. С. 11-14.

49. *Кирин Н.Е., Садовин Н.С.* Интерполяционный вариант метода последовательного демпфирования // Динамика систем управления. Л., ЛГУ. 1989. С. 18-23.

50. *Кирин Н.Е., Садовин Н.С.* Метод спуска в задачах численной оптимизации нелинейного процесса нагрева // Научно-техн. Прогресс в металлург. и хим. пр-вах. Деп. ВИНИТИ №5498. 1989. С. 338-347.

51. *Кирин Н.Е.* Метод оптимального демпфирования в задачах управления с неполной обратной связью // Вопросы механики и процессов управления. Л., ЛГУ. Вып. 12. 1989. С. 110-117.

52. *Кирин Н.Е., Рустамов М., Устинов В.Л.* К задаче идентификации с распределёнными параметрами // XI Всесоюзное совещание по проблемам управления. Ташкент, 1989. С. 113.

53. *Кирин Н.Е., Морозкин Н.Д.* Численные приближения экстремалей управляемых динамических систем. Учебное пособие. Уфа, 1989. 89 с.

54. *Кирин Н.Е., Кузютин В.Ф.* К теории оптимального оценивания функционалов на интегральных многообразиях // Дифференциальные уравнения и оптимальное управление. Тезисы докладов. Ашхабад, 1990. С. 173-174.

55. *Кирин Н.Е.* Метод последовательного демпфирования в задачах оптимального управления // Дифференциальные уравнения и оптимальное управление. Тезисы докладов. Ашхабад, 1990. С. 172-173.

56. *Кирин Н.Е.* Минимаксное парето-оптимальное управление по обратной связи в дискретной динамической системе // Методы сравнения и методы Ляпунова. Саранск, 1990. С. 25-31.

57. *Кирин Н.Е., Сауханова Ж.С.* Двусторонние оценки в задачах прогнозирования компонент дискретных систем // Математические методы в задачах управления и обработки данных. Рязань, РРТИ. 1990. С. 44-48.

58. *Кирин Н.Е., Садовин Н.С.* Методы спуска в задачах численной оптимизации нелинейного процесса нагрева // Сб. Научно-технический прогресс в металлургическом и химическом производствах. Днепропетровск. 1990. С. 338-347. Деп. ВИНИТИ.

59. *Кирин Н.Е., Исраилов И.* Оценочные системы в задачах теории управления. Ташкент, 1990. 160 с.

60. *Кирин Н.Е., Кирина Н.И.* Стабилизирующее управление по неполной обратной связи // Негладкие и разрывные задачи управления и оптимизации. Тезисы докладов. Минск, 1991. С. 54-55.

61. *Кирин Н.Е.* Непрямое стабилизирующее управление по обратной связи // Автоматика и телемеханика. 1991. №6. С. 40-46.

62. *Кирин Н.Е.* Метод оптимального демпфирования в задаче о быстродействии // Управляемые динамические системы. Саранск, МордГУ. 1991. С. 12-17.

63. *Каменев В.В., Кирин Н.Е.* Сопряженные задачи в навигационных системах // Управляемые динамические системы. Саранск, МордГУ. 1991. С. 50-59.

64. *Исраилов И., Кирин Н.Е.* Метод опорной системы в задачах оценивания компонент нелинейных дифференциальных уравнений // Узбекский математический журнал. 1991. №6. С. 25-33.

65. *Кирин Б.Е., Кирин Н.Е.* Метод функций Ляпунова в задачах

оценивания ω - предельных множеств решений управляемых дифференциальных включений // Дифференциальные и интегральные уравнения. Нижний Новгород, ННГУ. 1991. С. 66-72.

66. *Кирин Е.Я., Кирин Н.Е.* Метод оценивания проекций в обратных задачах колебаний и теплопередачи // Вестник Вологодск. научн. центра. Сер. естеств. науки. Вологда, 1991. №1. С. 25-32.

67. *Кирин Н.Е., Сейсов Ю.Б.* Оптимизация процессов в управляемых системах. Ашхабад, 1991. 268 с.

68. *Кирин Н.Е., Конев Г.Г.* Непрямое стабилизирующее управление с учётом возмущений // VIII конференция СНГ "Качественная теория дифференциальных уравнений". Тезисы докладов. Самарканд, 1992. С. 61.

69. *Кирин А.Н., Кирин Н.Е.* Анализ устойчивости систем с запаздывающим аргументом по дискретному приближению. Деп. ВИНИТИ 20.12.93 №3108-В93. 14 с.

70. *Кирин Н.Е., Сауханова Ж.С.* Оптимальное оценивание функционалов // Международный конгресс по компьют. системам и прикл. математике. СПб., 1993. 10 с.

71. *Н.Е. Кирин, Исраилов И., Отакулов С.* Задачи и методы оценивания управляемых систем. Ташкент, 1993. 229 с.

72. *Н.Е. Кирин.* Методы оценивания и управления в динамических системах. СПб., 1993. 308 с.

73. *Кирин Н.Е.* Об управлении динамической системой по обратной связи // Тезисы докладов международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения". Саранск, 1994. С. 7.

74. *Kirin N.E.* The Optimal Damping Method in Control Problems with Feedback // Nonlinear Game Theoretic Control Synthesis. SPb., 1995. 8 p.

75. *Кирин Н.Е.* Интерполяционные методы оценивания на решениях функциональных включений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. Т. 3. С. 206-209.

76. *Кирин Н.Е.* Об управлении динамической системой по обратной связи // РАН. Математическое моделирование. 1995. Т. 7. №3. С. 32.

77. *Kirin N.E., Proshkina E.V.* Finite element method in the problem of diffusion observation // Optimization of Finite Element Approximations. Abstracts. St. - Petersburg, 1995. P. 61.

78. *Кирин Н.Е.* К теории оценивания и управления в динамических системах // Вопр. механ. и процессов управления. СПбГУ,

1996. Вып. 17. С. 108-112.

79. *Кирин Н.Е.* Минимаксное оценивание функционалов на решениях линейных дифференциальных включений с интервально заданными коэффициентами. Деп. ВИНИТИ 05.03.96 №696-В96. 8 с.

80. *Кирин Н.Е.* К теории методов оценивания условного экстремума // Комплекс. анализ, дифф. ур-ния, численные методы и их прилож. РАН. Уфа, 1996. С. 66-70.

81. *Кирин Н.Е., Хафизова И.Н.* Оптимальные квадратурные формулы на решениях линейных дифференциальных включений второго порядка. Деп. ВИНИТИ 03.04.96 №1082-В96. 12 с.

82. *Кирин А.Н., Кирин Н.Е.* Метод последовательных приближений в задаче управления по неполной обратной связи в линейных дискретных системах и системах с последействием. Деп. ВИНИТИ 03.04.96 №1083-В96. 12 с.

83. *Кирин Н.Е., Кривцов А.Н.* Математические основы кибернетики. Часть I. Многочленные приближения функций и вычисление интегралов. Конспект лекций. СПб., СПбВУР ПВО, 1996. 88 с.

84. *Кирин А.Н., Кирин Н.Е.* Управление по обратной связи в системах с последействием // Тезисы докладов II международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения". Саранск, 1996. С. 27.

85. *Кирин Н.Е.* Алгоритмический синтез стабилизирующего управления по неполной обратной связи // Методы и средства управления технологическими процессами. Труды II международной конференции. Саранск, 1997. С. 110-111.

86. *Иванов А.П., Кирин Н.Е.* К методам оценивания функционалов на решениях систем линейных дифференциальных включений. Деп. ВИНИТИ 16.07.97 №2419-В97. 15 с.

87. *Kirin A.N., Kirin N.E.* A Successive Damping Method of Control Problems by Incompleet Feedback // International Conference on Informatics and Control. Proceedings. St. - Petersburg, 1997. P. 966-971.

88. *Кирин Н.Е.* Метод оптимального демпфирования в задаче терминального управления по неполной обратной связи с учетом возмущений. Деп. ВИНИТИ 18.11.97 №3366-В97. 15 с.

89. *Кирин А.Н., Кирин Н.Е., Прошкина Е.В.* Построение оптимальных квадратурных формул в классе функций с ограниченной в $L_2(0, 1)$ производной высокого порядка. Деп. ВИНИТИ 18.11.97 №3367-В97. 14 с.

90. *Кирин Н.Е.* Алгоритмический синтез стабилизирующего управления по неполной обратной связи // Тр. 2-ой междунар. научн. конф. “Методы и средства управления технологическими процессами”. Саранск. 1997, С. 110-111.

91. *Кирин Н.Е.* К методам сжатия табличной информации. Деп. ВИНИТИ 31.12.97 №3869-В97. 10 с.

92. *Кирин Н.Е.* Метод конечных элементов в задаче идентификации динамических систем. Деп. ВИНИТИ 31.12.97 №3870-В97. 12 с.

93. *Кирин Н.Е., Кривцов А.Н.* Математические основы кибернетики. Часть III. Математические основы оптимизации. Конспект лекций. СПб., СПбВУР ПВО, 1997. 123 с.

94. *Исраилов И., Кирин Н.Е.* Управление компонентами дифференциальных включений // Узбекский мат. журн. Ташкент, 1999. №1, С. 35-40.

95. *Гусева С.П., Кирин Н.Е.* Сопряженные задачи оценивания компонент процессов диффузии // ИНФОТЕХ-99. Информационные технологии в производственных, социальных и экономических процессах: материалы международной конференции. Череповец: ЧГУ, 1999 С. 33-34.

96. *Кирин Н.Е.* Об одном квадратурном процессе с экономизацией вычислений. Деп. ВИНИТИ 11.05.99. №1474-В99. 8 с.

97. *Кирин Н.Е.* К методам численного приближения функционалов на классах дифференцируемых функций. Деп. ВИНИТИ 06.07.99 №2195-В99. 10 с.

98. *Кирин Б.Е., Кирин Н.Е.* Релейное управление с учетом возмущений в канале обратной связи. Деп. ВИНИТИ 06.07.99 №2196 - В99. 12 с.

99. *Иванов А.П., Кирин Н.Е., Хафизова И.Н.* Квадратурные формулы с минимальным остатком и оценивание функционалов на решениях векторных дифференциальных включений. Деп. ВИНИТИ 12.07.99. №2258 - В99. 36 с.

100. *Кирин Н.Е., Кирпичников Б.К.* О давних семинарах по теории управления // Процессы управления и устойчивость. Труды XXX научной конференции С. - Петербург, 1999. С. 569-573.

101. *Кирин Н.Е.* Метод конечных элементов в задаче оценивания компонент динамических систем // “X - Понтрягинские чтения. Современные методы в теории краевых задач.” Воронеж, 1999. С. 122.

РЕДАКТИРОВАНИЕ

1. Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления движением // Межвуз. темат. сб. научн. тр. Саранск, Мордовский госуниверситет. 1980. 170 с. (в составе редколлегии).

2. *Овсянников Д.А.* Математические методы управления пучками. Л., ЛГУ. 1980. 220 с. (под редакцией Н.Е. Кирина).

3. Методы математического анализа управляемых процессов // Вопросы механики и процессов управления. Л., ЛГУ. 1981. Вып. 4. 284 с. (под редакцией Н.Е. Кирина).

4. Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления движением // Межвуз. сб. научн. тр. Саранск, Мордовский госуниверситет. 1983. 176 с. (в составе редколлегии).

5. Качественная теория дифференциальных уравнений и теория управления движением // Межвуз. сб. научн. тр. Саранск, Мордовский госуниверситет. 1985. 160 с. (в составе редколлегии).

6. Динамика систем и управление // Межвуз. сб. научн. тр. Саранск, Мордовский госуниверситет. 1986. 172 с. (в составе редколлегии).

7. Вопросы оптимального управления и исследования операций // Сб. научн. тр. Иркутск, Иркутский госуниверситет. 1988. 208 с. (в составе редколлегии).

8. Вычислительная и прикладная математика // Межвуз. сб. научн. тр. Уфа, Башкирский госуниверситет им. 40-летия Октября. 1988. 160 с. (в составе редколлегии).

9. Методы восстановления и анализа динамики управляемых процессов // Проблемы управления сложными системами. М., Министерство обороны. 1988. 127 с. (под редакцией М.М. Хрусталева, Н.Е. Кирина).

10. Динамика систем и управление // Межвуз. сб. научн. тр. Саранск, Мордовский госуниверситет. 1988. 164 с. (в составе редколлегии).

11. Математические методы моделирования и анализа управляемых процессов // Вопросы механики и процессов управления. Л., ЛГУ. 1989. Вып. 12. 204 с. (под редакцией Н.Е. Кирина).

12. Методы сравнения и методы Ляпунова // Межвуз. темат. сб. научн. тр. Саранск, Мордовский госуниверситет. 1990. 111 с. (в

составе редколлегии).

13. Академик В.В. Новожилов - ученый, педагог, гражданин // Вопросы механики и процессов управления. Л., ЛГУ. 1990. Вып. 13. 263 с. (в составе редколлегии).

14. Управляемые динамические системы // Межвуз. темат. сб. научн. тр. Саранск, Мордовский госуниверситет. 1991. 203 с. (в составе редколлегии).

15. Математические методы моделирования и анализа управляемых процессов // Вопросы механики и процессов управления. Санкт-Петербург, СПбГУ. 1996. Вып. 17. 258 с. (под редакцией Н.Е. Кирина).

СТАТЬИ (НЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ)

Статьи, опубликованные в газете Ленинградского (Санкт-Петербургского) Университета:

1. *Петросян Л.А., Кирин Н.Е.* Решающий этап // (ЛУ).- 1976. - 21февраля.

2. *Петросян Л.А., Кирин Н.Е.* Пятилетка ждет выпускника // (ЛУ).- 1977. - 22 апреля.

3. *Петросян Л.А., Кирин Н.Е.* Школа опыта // (ЛУ).- 1979. - 12 октября.

4. *Петросян Л.А., Кирин Н.Е.* Жизнь подсказала решение // (ЛУ).- 1980. - 30 мая.

5. *Кирин Н.Е.* Чтоб водить корабли // (ЛУ).- 1985. - 5 апреля.

6. *А. Андреев, Н. Матвеев, А. Талдыкин, В. Новоселов, Ю. Алешков, Н. Кирин, Л. Петросян.* Открывая новые направления в науке // (ЛУ).- 1990. - 13 апреля.

7. *Кирин Н.Е., Кирпичников Б.К.* Это было недавно // (СУ).- 1999. - 14 октября.

8. *Кирин Н.Е.* С ним было легко и светло. Памяти Владимира Николаевича Фомина // (СУ).- 2000. - 12 июня.

2. ТВОРЧЕСКОЕ НАСЛЕДИЕ Н.Е. КИРИНА
(Обзорные статьи)

М.И. Летавин

ТВОРЧЕСКОЕ НАСЛЕДИЕ НИКОЛАЯ ЕФИМОВИЧА КИРИНА

Профессор В.В. Жук оказал мне честь, предложив написать обзорную статью для мемориального сборника научных статей, посвященных моему учителю Н.Е. Кирину. Предложение почетное, но и задача такого обзора казалась непосильной. Облегчила труд вдова Николая Ефимовича - Нина Ивановна Кирина. Она предоставила в мое распоряжение различные списки трудов Н.Е., из которых был составлен “Хронологический список трудов”, список аспирантов, составленный им самим (оба списка приведены выше, с.11-18, с.10), и все монографии, учебные пособия и статьи, понадобившиеся в процессе работы. Варианты рукописи и отдельные вопросы удалось обсудить с Н.И. Кириной, В.В. Жуком, Л.А. Петросяном, В.Ф. Кузютиным, А.П. Ивановым, Л.Т. Позняком, И.В. Олемским. Всем перечисленным моя глубокая благодарность.

1. Статистические данные.

Николай Ефимович первую статью опубликовал в 1963 году [[1]] ([[1]] означает ссылку на первую работу в хронологическом списке трудов, [2] означает ссылку на вторую работу из списка использованной литературы), а последнюю [[101]] в 1999 году. Всего 101 работа. Из них монографий - 6, учебных пособий - 7, опубликованных статей и тезисов докладов - 67, депонированных статей - 21. Под его руководством защитили диссертации 23 аспиранта (см. список кандидатов наук, составленный самим Н.Е.).

Таблицы 1 - 3, приведенные ниже на следующей странице, позволяют выделить два периода в творчестве Н.Е. с нарастающей активностью. Первый период с 63 по 77 год и второй период с 78 по 99 год. Первый период характерен отсутствием учебных пособий и депонированных работ. Его главные итоги подведены в двух монографиях [[10,14]]. Второй период по интенсивности превосходит первый и характерен ростом объема учебных пособий и депонированных работ, интенсивной работой с аспирантами. Этот период так же венчают две монографии [[71, 72]] 1993 года.

Т а б л и ц а 1

Распределение количества работ по периодам

Период	Всего трудов	Монографий	Учебных пособий	Всего статей	Печатных статей	Депонированных статей
63-67	9	0	0	9	9	0
68-72	1	1	0	0	0	0
73-77	5	1	0	4	4	0
78-82	6	0	1	5	5	0
83-87	15	0	2	13	10	3
88-92	32	2	2	28	23	5
93-97	25	2	2	21	12	9
98-99	8	0	0	8	4	4
63-99	101	6	7	88	67	21

Т а б л и ц а 2

Распределение количества страниц в работах по периодам

Период	Всего трудов	Монографий	Учебных пособий	Всего статей	Печатных статей	Депонированных статей
63-67	64	0	0	64	64	0
68-72	144	144	0	0	0	0
73-77	177	160	0	17	17	0
78-82	94	0	65	29	29	0
83-87	139	0	60	79	59	20
88-92	781	428	178	175	137	38
93-97	906	537	211	158	46	112
98-99	80	0	0	80	14	66
63-99	2385	1269	514	602	366	236

Т а б л и ц а 3

Количество защитивших диссертации аспирантов

Период	63-67	68-72	73-77	78-82	83-87	88-92	93-97	98-99	63-99
Число аспи- рантов	0	0	1	5	4	9	3	1	23

2. Период с 1963 по 1977 год.

С 1963 по 1967 год опубликовано 9 статей [[1-9]]. Это был период осмысления позиции и приоритетов, которые выражены в монографии “Вычислительные методы теории оптимального управления” [[10]], вышедшей в 1968 году под редакцией В.В. Хоменюка. К характеристике этой монографии мы и переходим.

Во введении автор, во-первых, открещивается от задачи синтеза, а, во вторых, недвусмысленно объявляет свою работу пионерской, так как ни о каких предшественниках не упоминает (есть ссылка на “параллельные исследования”). Центральным для понимания его образа мыслей является абзац о двух методах решения экстремальных задач. “... Первый прием - вариационный - основывается на сравнении точки экстремума с близкими к ней точками (уравнение Эйлера). Второй прием заключается в использовании признаков отделимости множеств ... (условия Куна- Таккера) ...”. Эта позиция объединения прямых и двойственных методов и достижения симметрии в их использовании для численного решения экстремальных задач являлась “полярной звездой” во всем творчестве Н.Е. В конце введения “... Автор пользуется случаем выразить благодарность своим товарищам В.И. Валяеву, Б.К. Кирпичникову, В.И. Лукиной, Ю.В. Малееву, оказавшим большую помощь в подготовке рукописи”.

В первой главе даются некоторые вспомогательные сведения из функционального анализа и теории выпуклых множеств. Предпочтение отдается книгам Л.В. Канторовича и Г.П. Акилова [1] и М.М. Дэя [2]. Единственный факт, который доказывается в этой главе, это теорема строгой отделимости точки и замкнутого выпуклого множества в гильбертовом пространстве. Доказательство проводится таким образом, чтобы подчеркнуть связь между минимизирующей последовательностью в задаче о вычислении расстояния от точки до множества и последовательностью гиперплоскостей разделяющих эту точку и множество (“Два приема”).

Вторая глава посвящается условиям оптимальности. Она начинается с повторения абзаца о “двух приемах” и указания на работы ряда авторов, среди которых пофамильно упоминаются Л.С. Понтрягин [3], А.Я. Дубовицкий и А.А. Милютин [4], Г.Ш. Рубинштейн [5] и L.W. Neustadt & H. Halkin [6]. В первом параграфе даются необходимые условия оптимальности в задаче нелинейного программирования (НЛП) в терминах допустимых направлений. Здесь уже заметен геометрический способ мышления автора. Текстовая часть следует за определенным геометрическим образом. Основным является второй параграф. В нем сначала излагается схема двойственности в задаче НЛП с использованием линейных функционалов для построения двойственной задачи. Эта схема обосновывается для строго выпуклых функционалов. Затем рассматривается “общий случай” с использованием нелинейных функционалов для построения двойственной задачи в “пространстве условий”. Здесь сформулированы общие требования к функционалам, необходимые для доказательства теоремы двойственности, и приведены конкретные семейства функционалов - со сферическими и параболическими поверхностями уровня. Подчеркивается, что параболические функционалы включают в себя так называемые “методы штрафных функций”. Заметим, что тогда еще не названные методы регуляризации тоже включаются в схему параболических функционалов.

Третья глава посвящена построению минимизирующих последовательностей в прямой задаче (“в пространстве аргумента”). В первом параграфе рассматриваются методы одномерной оптимизации. Автор с удовольствием описывает метод Джонсона, связанный с последовательностью Фибоначчи. Параграф два связан с градиентными методами поиска безусловного экстремума. Подчеркивается значение метрики и специальных множеств простой структуры при выборе направления подъема. В третьем параграфе обсуждаются методы возможных направлений в терминологии Г. Зойтендейка [7] и метод подходящих вариаций. Последний метод сформулирован Н.Е. для специального случая максимизации функционала, зависящего от состояния объекта, которое в свою очередь определяется управлением через уравнение состояния. В четвертом параграфе “рассмотрено приложение метода подходящих вариаций к задачам оптимального управления объектами, поведение которых описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений". Упомянуты в качестве предшественников Дж. Брайсон [8,9], Г. Келли [10], Л.И. Шатровский [11]. Здесь показано в частности, что использование в качестве "возможных" игольчатых вариаций позволяет строить максимизирующие последовательности, удовлетворяющие в пределе "принципу максимума".

Четвертая глава названа "Методы оптимизации в пространстве условий". Здесь рассматривается задача максимизации функционала при ограничениях - равенствах. На основе схемы двойственности второй главы предлагаются алгоритмы построения минимизирующей последовательности для двойственного функционала на основе семейства линейных функционалов (параграф первый) и на основе сферических функционалов (параграф второй). Затем в параграфах три и четыре алгоритмы применяются к задачам управления. В параграфе три разобрана задача, в которой уравнения состояния линейные дифференциальные и имеются ограничения на фазовые координаты, а так же случай уравнений состояния с запаздыванием без ограничений на фазовые координаты. В параграфе четыре описывается задача управления нагревом стержня теплоизолированного с одного конца и нагреваемого с другого за счет конвективного и радиационного теплообмена с внешними тепловыми источниками. При этом управлением являются температуры этих тепловых источников. Подробно разобран случай конвективного теплообмена и намечены методы решения нелинейной задачи с радиационным теплообменом.

В отдельную главу (**пятую**) вынесена задача об оптимальном быстродействии. Во введении в качестве предшественников названы Н.Н. Красовский [12, 13], Л. Нойштадт [14] и Дж. Итон [15]. Сначала рассматривается "однородная задача об оптимальных линейных быстродействиях" и двойственная к ней (здесь двойственная задача вводится специальным методом, основанным на теореме Н.Н Красовского), затем приведенные алгоритмы применяются к неоднородной задаче. Далее рассматривается случай ограничений на фазовые координаты и общая задача быстродействия.

В период до выхода второй монографии были опубликованы три статьи [[11-13]], в которых Н.Е. обратился к задаче синтеза. Соавторами его работ в этот период были А.П. Иванов и А.Г. Бабкин. В 1975 году увидела свет монография "Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем" [[14]]. По структуре вторая монография похожа на первую. Отличия следующие:

убрано изложение терминологии нормированных пространств; задача быстродействия поставлена сразу за общетеоретическим материалом первых двух глав; разные задачи вынесены в последнюю главу. Рассмотрим содержание монографии.

В предисловии автор пишет "... Настоящая работа посвящена развитию некоторых общих методов решения задачи об экстремуме и их приложению к задачам оптимизации параметров динамических систем". Рассуждение о "двух приемах" из первой монографии приобрело такой вид: "... В теории поиска экстремума можно выделить два направления - две группы идей, по которым строятся методы этой теории. Это, с одной стороны, методы последовательных приближений для построения последовательности допустимых элементов (программ), удовлетворяющих всем ограничениям задачи, причем значение оптимизируемого функционала на этих последовательностях стремится к оптимальному. ... Методы другой группы сводят исходную задачу об условном экстремуме к последовательности задач на безусловный экстремум (или задач с меньшим количеством условий). Это метод множителей Лагранжа, методы штрафных функций". Появился новый идейный момент о связи с методами Ляпунова: "... Известны неформальные параллели между методами этих вышеназванных групп и первым и вторым методами А.М. Ляпунова в теории устойчивости. Эти параллели "окончательно смыкаются" в задачах оптимизации динамических систем (достаточно вспомнить задачу аналитического конструирования регулятора А.М. Летова)". Из авторов предшествующих работ по первой группе методов названы Ф. Вульф [21], Г. Зойтендейк [7], Л. Нойштадт и Г. Халкин [22], В.И. Зубов [16-18], Л.С. Понтрягин [3], Р. Беллман [19], Е.А. Барбашин, В.Ф. Кротов [20], А. Брайсон [23, 24], Дж. Келли [10], Л.И. Шатровский [11]. По второй группе методов - Г.Ш. Рубинштейн [5, 25]. В конце предисловия выражена благодарность " А.Г. Бабкину, А.П. Иванову, М.Р. Сафоновой, которые предоставили свои исследования и результаты численных экспериментов...".

Первая глава посвящена методам "первой группы". В первом параграфе в отличие от первой монографии свойства максимизирующей последовательности излагаются с точки зрения второго метода А.М. Ляпунова. Вводится понятие нормальной последовательности возрастания по оценке (НПВО). Сама оценка - аналог дифференциального уравнения, а построенная последовательность точек

- аналог траектории. С помощью функционалов Ляпунова даются достаточные условия для сходимости последовательности к множеству стационарных точек. В параграфе два построение оценок функционала иллюстрируется для дифференцируемых функций в виде методов возможных направлений, покоординатного подъема, методов высших порядков и интерполяционных методов. В третьем параграфе рассматривается "задача Майера", в которой состояние объекта описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений на ограниченном временном интервале и оптимизируется функционал, зависящий от состояния в конечный момент. Для построения оценки функционала использован прием В.И. Зубова вычисления функции Ляпунова из специального уравнения с частными производными. С помощью игольчатых вариаций, так же как в предыдущей монографии, строится максимизирующая последовательность управлений и доказывается ее сходимость к управлению, удовлетворяющему принципу максимума.

В главе два "рассматривается одна схема двойственности в теории экстремума для задач невыпуклого программирования". Специально отмечены работы Дж. Итона [15], "где анализ задачи о быстродействии линейной управляемой системы основывается на достаточно общих геометрических построениях", и Г.Ш. Рубинштейна [5, 25], где "строится общая схема задач линейного и выпуклого программирования ...". В первом параграфе ставится абстрактная задача быстродействия в форме вычисления наименьшего значения параметра, при котором точка захватывается множеством, зависящим от этого параметра. Рассматриваются различные внутренние и внешние аппроксимации основного множества. Специально обсуждаются сферические и линейные оценки. Приведен алгоритм построения последовательных приближений "времени быстродействия" на основе линейных оценок. Во втором параграфе эксплуатируется дифференциал супремума для применения градиентных методов при выборе последовательных приближений с линейными оценками. В третьем параграфе рассматривается "задача о крайней точке". Так теперь названа задача максимизации функционала при ограничениях - равенствах из четвертой главы первой монографии. В названии использован геометрический образ наивысшей точки пересечения множества достижимости (в декартовом произведении пространства условий и одномерного пространства значений функционала) с осью значений функционала. Показано как к этой задаче сводится задача НЛП и задача о “минимаксе”. Далее показано как можно свести задачу о крайней точке к абстрактной задаче быстродействия второй главы и приведены модификации “метода разделяющих сфер” для этого специального случая.

Третья глава называется “Задача о быстродействии в управляемых динамических системах”. Во вводной части автор упоминает “первые работы Л. Нойштадта [26] и Дж. Итона [15] по численным методам поиска оптимальных по быстродействию траекторий линейной системы. Эти методы состоят фактически в решении двойственной задачи - задачи о множителях Лагранжа - сопряженной переменной в принципе максимума Л.С. Понтрягина ”. В первом параграфе дана постановка задачи быстродействия для объекта, состояние которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с зависящими от управления правыми частями. Цель управления состоит в переводе фазового вектора из начальной точки в некоторое множество за наименьшее время. Эта задача “приводится к канонической форме” абстрактной задачи быстродействия второй главы. Во втором параграфе для решения “двухточечной задачи линейного быстродействия” применен алгоритм “корректировки линейных оценок” главы второй. В параграфах третьем и четвертом рассматривается решение линейной задачи быстродействия с ограничениями на фазовые координаты и с запаздывающим аргументом. Параграф пятый посвящен решению задачи синтеза на основе итеративных методов.

В четвертой главе “даются приложения алгоритмов §3 гл. 2 к решению некоторых конкретных классов задач ...”. В первом параграфе задача о наблюдаемости линейной управляемой системы сводится отысканию проекции решения линейного неоднородного уравнения на заданный вектор в гильбертовом пространстве и тем самым приводится к форме, для которой применимы методы последовательных приближений главы 2. О параграфе два автор выразился так: “§2 посвящен идее использования методов решения задач об экстремуме в решении нелинейных уравнений. В этой старой задаче (стоит вспомнить метод минимизации невязки) автора интересовал вопрос о существовании содержательной задачи невыпуклого программирования, которую можно было бы до конца решить методами гл. 2. Такой задачей оказалась задача о нахождении корней полинома. В §2 после приведения этой задачи к решению интерполяционной системы уравнений указывается функция, задача минимизации которой на множестве решений этой системы может быть решена до конца методом корректировки множителей Лагранжа при специальном подборе узлов интерполирования...". В этом параграфе Н.Е. фактически формулирует общую схему регуляризации при решении уравнений в условиях неединственности. В параграфе три рассматривается задача управления линейной системой гиперболических уравнений с ограничениями на "фазовые координаты" и с квадратичным целевым функционалом. Эта задача приводится к виду задачи о крайней точке и решается методом разделяющих сфер из второй главы.

3. Период с 1978 по 1999 год.

В 1978 - 81 годах вышло пять работ [[16 - 20]]. Соавторы этого периода - Е.А. Белин, Ю.Б. Сейсов, В.Н. Байдаев, Р.А. Нелепин. Эти работы развивали методы второй монографии. Особо выделим работу [[20]], в которой Н.Е. обратился к новой задаче построения области притяжения по методу В.И. Зубова. В 1982 году появилось первое учебное пособие [[21]], подготовленное Н.Е. в соавторстве с В.А. Олейниковым и В.Г. Григоряном. Как следует из предисловия, он принимал участие в первой и второй главе. Здесь с разбором примеров изложены сведения из функционального анализа, теории экстремума и вариационного исчисления, подводящие к основной задаче управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Особое внимание уделяется геометрической интерпретации сопряженных переменных. Описывается градиентный метод построения оптимизирующей последовательности управлений.

С 1983 по 1986 год опубликованы статьи [[22 - 31]], в том числе с соавторами Ю.Я. Остовым, Н.Д. Морозкиным, Н.Г. Садовиным, Р.Р. Бетанкуртом, С.И. Веденяпиной, А.П. Ивановым, В.Л. Устиновым, А.Ю. Халбаевым.

В 1986 году издано совместно с И. Исраиловым учебное пособие [[32]] "Оценочные системы теории управления". В этом пособии основное внимание уделяется методам Ляпунова решения экстремальных задач: "Аппарат специально подобранных функций Ляпуновского типа позволяет с единых позиций анализировать различные вопросы управляемого процесса: идентификации модели процесса, выбор управляющих параметров, прогнозирование характеристик процесса, адаптация управления и др. В рамках этой методики, в частности, показываются достаточные условия оптимальности в форме уравнения Беллмана, а также элементы принципа максимума Л.С. Понтрягина, метод оптимального демпфирования В.И. Зубова". В первом параграфе в качестве модельной задачи рассматривается управление полетом летательного аппарата. Во втором параграфе дается общая постановка задачи управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с функционалом Майера. Причем, управляющая вектор- функция зависит от фазовых переменных и от времени и называется "функциональным параметром". При помощи оценочной системы вводится функционал Ляпунова и через него выражается приращение целевого функционала при вариации управления и функция Беллмана. Анализ приращения с учетом необходимых условий оптимальности приводит в параграфе три к уравнению Беллмана и методу оптимального демпфирования В.И. Зубова. При отсутствии ограничений на управление для линейной системы управления получено уравнение Рикатти для матрицы квадратичной формы функционала Ляпунова. В четвертом параграфе рассматривается задача "терминального управления", то есть когда управляющая функция не зависит от фазовых координат ("программное управление"). Выводится достаточное условие оптимальности и строится метод "последовательного улучшения программных управлений" на основе "игольчатых вариаций". В заключение параграфа рассматривается задача с "терминальными связями", когда целевой функционал зависит от состояния объекта в конечный момент и состояние объекта в конечный момент должно принадлежать некоторому многообразию, заданному системой равенств. При условии линейности уравнения и функционалов предлагается итерационная процедура отыскания оптимального управления на основе минимизации функции Лагранжа на каждом шаге. В пятом параграфе приводятся конкретные задачи механики летательных аппаратов, которые решаются разработанными в теоретических параграфах методами.

В 1987 году опубликованы две статьи [[34, 35]], вторая в соавторстве с И. Исраиловым и А.Н. Шахидзе, и вторая часть методического пособия "Оценочные системы теории управления" [[36]] в соавторстве с И. Исраиловым. Эта работа посвящена задачам наблюдаемости или "идентификации" управляемой системы. В первом параграфе рассматривается линейная динамическая система без возмущений. По вектору наблюдений требуется восстановить состояние и управление. Это восстановление начинается с построения "компоненты" - проекции вектора состояния на заданный вектор. С помощью множителей Лагранжа восстанавливается формула представления компоненты через наблюдение и управление. Ставится вопрос о верхней и нижней оценках компоненты при заданном классе ошибок наблюдения и управлений. Выводится точная оценка погрешности восстановления компоненты, зависящая от сопряженных переменных, и ставится задача о минимизации оценки. Это приводит к задаче минимизации выпуклого функционала при линейных ограничениях - равенствах. Далее приводится общая схема "оценки линейных функционалов на линейных связях" в случае уравнений в нормированных пространствах. Заканчивается параграф указанием новой формы параметрического представления компоненты в нелинейной задаче идентификации. Во втором параграфе рассматривается задача стабилизации линейной управляемой системы по части переменных, в том числе при постоянно действующих возмущениях. Здесь так же использована техника оценки компоненты фазового вектора из первого параграфа.

1988 год выделяется большим количеством статей [[37-46]]. Соавторами Н.Е. были Ю.В. Заика, И. Исраилов, М. Рустамов, А.Ю. Халбаев, Н.С. Садовин, А.П. Иванов. Особо подчеркнем работу [[37]], где развивается задача о наблюдении компоненты в нелинейной ситуации с использованием интегральных функционалов Кирина, и работу [[40]], где впервые метод Кирина оценки погрешности в задаче идентификации применен к анализу квадратурных формул.

В этом же году в соавторстве с А.П. Ивановым опубликовано учебное пособие "Сопряженные задачи теории управления" [[47]]. Оно состоит из введения и трех глав. Как следует из введения " Основу книги составляют результаты Н.Н. Красовского по теории управления линейными системами [27]. Использованы также идеи вариационной теории поля, метод оптимального демпфирования В.И. Зубова [28]." Распределение труда при написании обозначено так: "Первая глава написана А.П. Ивановым, вторая и третья Н.Е. Кириным. Большое участие в подготовке рукописи приняли Т.Г. Миронова и О. Зюбанова". В первой главе изложена теория наблюдаемости для линейных дифференциальных и разностных уравнений. Вторая глава начинается с общего изложения методики оценки линейного функционала на решениях линейного уравнения. Этому посвящен параграф первый. Во втором параграфе с позиций общей теории проводятся вычисления для неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений с неоднородной линейной зависимостью наблюдаемых переменных от переменных состояния. Решаются вопросы о наблюдении компоненты и о прогнозировании компоненты. В третьем параграфе такие же вычисления проводятся для задачи восстановления интенсивности источников линейного диффузионного уравнения по наблюдениям за температурой. Третья глава - "Наблюдаемость и управление в нелинейных динамических системах" - посвящена наблюдаемости компоненты, определяемой как функционал от фазового вектора нелинейной системы дифференциальных уравнений. Значение функционала на фазовом векторе предлагается отыскивать в виде интегрального оператора с нелинейным относительно наблюдаемого вектора ядром. Это представление приводит к задаче определения функционала Ляпунова и ядра из уравнения с частными производными первого порядка. Остальная часть главы посвящена разбору технических вопросов решения этого уравнения для задач идентификации и прогнозирования, стабилизации при неполных данных, дифференциальных игр.

В 1989 году опубликованы статьи [[48 - 52]], две из которых в соавторстве с Н.С. Садовиным и одна в соавторстве с М. Рустамовым и В.Л. Устиновым, и учебное пособие [[53]] "Численные приближения экстремалей управляемых динамических систем" совместно с Н.Д. Морозкиным. В этом учебном пособии первая глава традиционно посвящена теории управления динамическими системами с сосредоточенными параметрами. Во второй главе предъявлены алгоритмы "метода прямых" сведения к задачам оптимизации с сосредоточенными параметрами и построения оптимальных программ для последних. Вопросы связи с исходными задачами с распределенными параметрами не обсуждаются.

В 1990 году появились три статьи [[54 - 58]] (соавторы этого года В.Ф. Кузютин, Ж.С. Сауханова, Н.С. Садовин). В статье [[56]] Н.Е. впервые обратился к оцениванию оптимальности в смысле Парето. В этом же году под редакцией В.И. Зубова вышла монография "Оценочные системы в задачах теории управления" [[59]] в соавторстве с И. Исраиловым. Монография состоит из трех глав. В первой главе "Оценивание в задачах оптимального программирования траекторий динамических систем" приводится методика специального выбора функции Ляпунова для построения "оценочной" экстремальной задачи. Демонстрируются соответствующие вычисления для задачи Майера. Особо стоит четвертый параграф ("Задачи о гарантированном минимуме функционала для управляемых дифференциальных включений"), который не связан идейно с методами главы. Это первое обращение Н.Е. к дифференциальным включениям. Вторая глава в основном соответствует изложению в [[43]] задачи о компоненте в линейной ситуации. Важным новым элементом является применение метода к анализу классических задач численного дифференцирования, интерполирования и построения квадратурных формул. Глава три развивает содержание метода перехода к двойственности в нелинейной задаче о наблюдении компоненты из работы [[43]]. Дополнительно рассматриваются дискретные динамические системы и системы с запаздыванием.

В 1991 году опубликованы статьи [[60 - 66]] (соавторы этого периода - Н.И. Кирина, В.В. Каменев, И. Исраилов, Б.Е. Кирин, Е.Я. Кирин, Ю.Б. Сейсов) и монография [[67]] под редакцией В.И. Зубова "Оптимизация процессов в управляемых системах" в соавторстве с Ю.Б. Сейсовым. Авторы посвятили эту книгу А.М. Летову. В конце предисловия указано: " Главы 1,4 написаны Ю.Б. Сейсовым, главы 2, 3 и Приложения - Н.Е. Кириным. Авторы выражают глубокую признательность чл.-корр. АН СССР В.И. Зубову и профессору В.А. Олейникову за многолетнюю поддержку и предоставление возможности постоянно пользоваться их советами и научными результатами " В предисловии к главе второй Н.Е. пишет: "В данной главе для задачи об оптимальной траектории без фазовых ограничений (если не считать фиксированного начального фазового состояния) кратко излагаются идеи градиентных методов, методов спуска по сильным вариациям управления с привлечением метода оптимального демпфирования В.И. Зубова " Третью главу Н.Е. назвал "Приближение оптимальных траекторий в задачах с ограничениями на переменные состояния". В ней новым моментом является рассмотрение управления пучком траекторий. Приложения 1 - 4 посвящены различным конкретным вопросам. Интересно, что в приложениях два и три впервые подробно обсуждаются вопросы скорости сходимости алгоритмов. В конце приложения 2 имеются ссылки на Е.В. Прошкину и С.Е. Михеева.

В 1992-1993 годах публикованы статьи [[68 - 70]] (соавторы: Г.Г. Конев, А.Н. Кирин, Ж.С. Сауханова) и две монографии [[71,72]]. Монография "Задачи и методы оценивания управляемых систем" под редакцией В.И. Зубова подготовлена в соавторстве с И. Исраиловым и С. Отакуловым. В конце введения указано распределение ответственности: "... Глава 1 написана С. Отакуловым, главы 2 и 3 - И. Исраиловым и Н. Кириным ... ". По характеристике авторов "... Вторая глава посвящена управлению решениями векторного уравнения с запаздывающим аргументом... Здесь ... изучаются задачи оценивания функционалов с помощью обобщенной функции Лагранжа ... В качестве сопряженного уравнения ... в этих задачах выступают уравнения типа Гамильтона-Якоби (А.М. Ляпунова, Р. Беллмана). ...предлагаются алгоритмы последовательных приближений в задачах о синтезе линейного стабилизирующего управления по обратной связи, программного управления в линейной задаче о быстродействии; излагается метод оптимального демпфирования в одной нелинейной задаче терминального управления... " В третьей главе рассматривается линейное одномерное уравнение теплопроводности " с граничными условиями третьего типа и параметрами возмущений. За наблюдаемую величину ... здесь приняты функции изменения температуры в отдельных точках пространственной переменной. Начальные данные предполагаются незаданными. В этих условиях ставятся и решаются сопряженные задачи ... восстановления и оценивания компонент процесса теплопередачи. На основе их решения обсуждается синтез управления компонентами процесса... " В этой главе для аппроксимации уравнения теплопроводности используется не метод прямых (как в [[53]]), а метод разделения переменных.

Вторую монографию 1993 года "Методы оценивания и управления в динамических системах" можно рассматривать как подведение итога научных исследований на момент её написания. Она посвящается родителям Клавдии Павловне и Ефиму Яковлевичу Кириным. Во введении автор перечисляет "... Ю.В. Заику как автора главы 3 и §4 главы 5, внесшего в эти разделы ранее не публиковавшиеся результаты. Необходимо отметить А.В. Затевахина и Б.Е. Кирина, чьи аналитические исследования по оптимизации ω - предельных множеств частных систем с возмущениями в управлении нашли отражение в §1 главы 5 и дают пищу для содержательных обобщений и приложений. Глубокую признательность хочу выразить доктору физ.-мат. наук В.В. Хоменюку, доцентам факультета прикладной математики - процессов управления Санкт - Петербургского университета А.П. Иванову и Л.Т. Позняку, благотворно повлиявшим на отдельные фрагменты книги. Особую благодарность приношу Т.Г. Мироновой и Е.В. Прошкиной за помощь в оформлении рукописи."

Глава 1 "Общие вопросы оценивания функционалов". В ней "... излагается общая геометрическая схема двойственных (сопряженных) задач теории условного экстремума... Она состоит в описании условий экстремума с помощью обобщенных функций Лагранжа... Указанная геометрическая схема порождает множество конкретных методов последовательных приближений условного экстремума, включая известные методы корректировки множителей Лагранжа и метод штрафных функций (метод минимизации невязок)." Основной целью первого параграфа ("Прямые и сопряженные задачи поиска экстремума") "является изложение геометрической теории двойственных ... задач одностороннего оценивания экстремума функции на множестве, заданном функциональным уравнением (включением) в нормированном пространстве... Наглядная геометрическая интерпретация условий экстремума в пространстве условий, использованная в свое время академиком Л.В. Канторовичем для задач линейного и нелинейного программирования, позволяет с единых позиций формировать такие методы и условия их сходимости. Важно отметить, что схема разделения выпуклых множеств служит инструментом для приближенного решения и "невыпуклых" задач после специальной их обработки... " Из этого видно, что Н.Е. не изменил своих взглядов на значение двойственности по сравнению с первой монографией 1968 года. С точностью до обозначений рассматривается "задача о крайней точке" и двойственные методы ее решения. Последний пункт параграфа посвящен прямым методам решения задач НЛП. В параграфе два формулы общей схемы двойственности конкретизируются для случая линейного функционала на выпуклом множестве при линейном уравнении "связи".

Глава 2 - "Сопряженные задачи оценивания функционалов на решениях дифференциальных уравнений" - состоит из четырех параграфов. В первом параграфе для динамической системы общего вида ставится нелинейная задача наблюдаемости компоненты и излагается подход к ее решению на основе интегрального представления компоненты с неизвестным ядром. Во втором параграфе процедура восстановления ядра детализируется для случая автономной системы дифференциальных уравнений. Третий параграф демонстрирует конструктивность методики в классических задачах построения квадратурных формул и интерполирования функций. В четвертом параграфе строятся оценки компонент для линейных уравнений теплопроводности и волнового.

Глава 3 - "Задача наблюдаемости нелинейных систем" - написана Ю.В. Заикой. Она является ярким примером метода построения ядра интегрального наблюдения для функционала Кирина в существенно нелинейной ситуации.

Глава 4 - "Управление дискретными по времени процессами" - посвящена построению для дискретных процессов "модификаций метода оптимального демпфирования, предложенного В.И. Зубовым для поиска оптимального управления в непрерывных детерминированных системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями... ".

В главе 5 - "Управление по обратной связи в непрерывных системах" - "рассматривается в основном задача стабилизации линейных систем по неполной обратной связи".

Главы 4 и 5 иллюстрируют применение общих методов глав 1 - 3 на всем спектре задач теории управления: стабилизация по полной и неполной обратной связи, задача быстродействия, задача Майера, Парето - оптимизация, задача преследования и др.

Работы 1994 - 99 годов написаны в развитие методов монографии 1993 года. Статьи [[73, 74, 76, 82, 84, 85, 87, 88, 90, 98,]] посвящены управлению по обратной связи, [[75, 77, 78, 79, 80, 86, 92, 94, 95, 101]] - задачам наблюдения компонент динамических систем, [[81, 89, 91, 96, 97, 99]] - применению методов наблюдаемости динамических систем к классическим задачам численного анализа в "киринской" постановке. Соавторы этого периода Е.В. Прошкина, И.Н. Хафизова, А.Н. Кирин, А.П. Иванов, И. Исраилов, С.П. Гусева, Б.Е. Кирин. Исторический интерес представляет статья [[100]] в соавторстве с Б.К. Кирпичниковым, проливающая свет на идейное становление ряда первых сотрудников факультета ПМ-ПУ. Педагогические подходы Н.Е. к преподаванию численных методов отражены в учебном пособии [[83, 93]], подготовленном совместно с А.Н. Кривцовым.

Подводя итог, можно сказать, что Н.Е. начал творческую деятельность в период зарождения численных методов решения экстремальных задач; его работы охватывают все конкретные прикладные задачи теории управления с позиции небольшого числа математических идей, главной из которых была идея двойственности; ему был свойственен геометрический образ мышления; он не останавливался на вопросах скорости сходимости алгоритмов, считая эти вопросы математическими упражнениями.

Указатель литературы

1. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. Л., 1959.
2. *Дэй М.М.* Нормированные линейные пространства. М., 1961.
3. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.
4. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Задача на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. Т. 5. №5. 1965. С. 395-463.
5. *Рубинштейн Г.Ш.* Двойственные экстремальные задачи // ДАН СССР. Т. 152. №2. 1963. С. 288-291.
6. *Halkin H., Neustadt L.* General necessary conditions for optimization problems. Univ. of South Calif. School of Engng. Techn. Rep. 1966.
7. *Зойтендейк Г.* Методы возможных неправлений. М., 1963.
8. *Брайсон Д., Денхэм В.* Решение задач оптимального программирования методом быстрейшего подъема // Прикл. мех. №2. 1962.
9. *Денхэм В., Брайсон Д.* Задача оптимального программирования при наличии ограничений типа неравенств, II // Ракетная техника и космонавтика. №1. 1964.
10. *Келли Г. Д.* Метод градиентов // В кн. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. М., Наука, 1965.
11. *Шатровский Л.И.* Об одном численном методе решения задач оптимального управления // ЖВМ и МФ. Т. 2. Вып. 3. 1962.
12. *Красовский Н.Н.* Об одной задаче оптимального регулирования // Прикл. матем. и мех. Т. 21. Вып. 5. 1957.
13. *Красовский Н.Н.* Оптимальное управление в динамических системах // УМН. Т. 20. Вып. 3. 1965.
14. *Neustadt L.W.* Synthesizing time optimal control systems // J. Math. Anal. Appl. Vol.1. №3-4. 1962.
15. *Eaton J.H.* An iterative solutions to time optimal control // J. Math. Anal. Appl. Vol.5. №2. 1962. P. 329-344.
16. *Зубов В.И.* Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л., 1962.
17. *Зубов В.И.* Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л., 1966.
18. *Зубов В.И.* Аналитическая теория гироскопических систем. Л., 1970.
19. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М., 1960.
20. *Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.М.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М., 1969.
21. *Кюнци Г.П., Крелле В.* Нелинейное программирование. М., 1965.
22. *Halkin H., Neustadt L.* General necessary conditions for optimization problems // Proc. Nat. Acad. Sciences. 1966. v. 56. P. 1066 - 1071.
23. *Брайсон А.* Решение задач оптимального программирования методом быстрейшего подъема // Прикладная механика. 1962. №2. С. 132-145.
24. *Брайсон А., Хо Ю Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М., 1972.
25. *Рубинштейн Г.Ш.* Конечномерные модели оптимизации. Курс лекций. Новосибирск, 1970.
26. *Neustadt L.* Sinthesizing time-optimal control systems // J. Math. Anal. Appl. 1960 V.1. §4. P. 484-492.
27. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.
28. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. Л., 1975.

Ю.В. Заика

НАБЛЮДЕНИЕ И ОЦЕНИВАНИЕ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ: КРАТКИЙ ОБЗОР РАБОТ Н. Е. КИРИНА

Задача наблюдения в динамических системах является одной из классических в математической теории управления. В связи с задачами управления движением принята механическая терминология, хотя подобные задачи характерны для различных областей науки, где необходима обработка измерений, дающих непосредственно лишь косвенную информацию об изучаемом явлении: экспериментальная физика, сейсмология и геологоразведка, химическая кинетика, популяционная динамика и т. д. Так что выделение методов решения задач наблюдения в динамических системах в самостоятельный раздел теории управления весьма условно и, как правило, соответствует контексту и специфике именно задач механики управляемого движения.

Если в солидной электронной библиотеке научных журналов задать поиск по ключевому слову наблюдаемость (observability) в названии статьи, то количество ссылок будет исчисляться тысячами. При этом дело не только в богатстве результатов, но и в огромном разнообразии постановок задач. Поэтому в данном кратком обзоре даже не будем пытаться охарактеризовать основные направления исследований, а остановимся на тех результатах, которые достигнуты одним конкретным человеком. Будем анализировать материал, систематизированный в книгах [1-5].

Общая постановка проста: известен закон движения объекта (обычно это система n дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(t, x)$) и уравнение доступной информации о текущем фазовом состоянии $y = g(t, x)$; требуется по известной на фиксированном отрезке времени вектор-функции (измерениям) $y(\cdot) : [0, T] \to \mathbf{R}^m$, $m < n$, восстановить начальный фазовый вектор x^0. Обычно подразумевается, что задачу требуется решать систематически, т. е. нужна операция определения по любому допустимому выходу $y(\cdot)$ соответствующего x^0 из *a priori* заданной области $U_0 \subseteq \mathbf{R}^n$. В случае успеха однозначно восстанавливается движение $x(\cdot)$. В приложениях чаще требуется вычислить состояние к моменту окончания времени наблюдения $x(T) \in U_T$ или значения заданных функций $\varphi\big(x(T)\big)$, “минуя” x^0.

Проблема относится к классу нелинейных обратных со всеми вытекающими математическими трудностями. Условно можно выделить два основных направления: поиск критериев наблюдаемости и построение разрешающих операторов. Обращение отображения $x(T) \mapsto y(\cdot)$ в аналитической форме возможно лишь в тривиальных случаях. Поэтому вычисляют значения конечного числа функционалов на $y(\cdot)$ (дискретные программы наблюдений, производные выхода в заданные моменты времени, интегралы с весовыми функциями) и применяют критерии инъективности отображений в конечномерных пространствах. В теоретическом отношении удобно использовать производные: в приложениях f, g часто задаются композициями элементарных функций, а значит, и $y_j^{(i)}(t_*)$ таковые. Фиксируя n производных выбором i, j, t_*, получаем систему уравнений для определения $x(t_*)$. Но последовательное дифференцирование $y(\cdot)$ приводит к некорректной с вычислительной точки зрения процедуре восстановления $x(T)$ и неработоспособности алгоритма в условиях зашумленности реальных измерений. Поиск критерия наблюдаемости — относительно простое занятие. Куда сложнее построить “хороший” оператор восстановления $x(T)$.

Изложенная выше “базовая” задача наблюдения динамических систем давно уже является предметом учебников для высшей школы. Автор кратко обозначил её в расчете не на специалистов, а на читателей-студентов, которые могли бы ею заинтересоваться. В журнальной литературе все масштабнее: системы с последействием, с распределенными параметрами, в абстрактных пространствах, со стохастическими возмущениями, в условиях неопределенности, асимптотические наблюдатели, ...

Н. Е. Кирин обратился к этой задаче уже в монографии [1]. По формальным признакам (десяток страниц) она тогда еще занимала скромное место в диапазоне его научных интересов. Первые монографии были посвящены общим идеям и численным методам оптимизации управляемых динамических систем, в частности, алгоритмам оптимального быстродействия. Несомненно, интерес к этой задаче у него возник после публикаций Н. Н. Красовского, А. Б. Куржанского и В. И. Зубова. Нельзя не отметить и влияние коллег: минской школы (Ф. М. Кириллова, Р. Габасов) и М. С. Никольского.

Что касается деталей, то это была линейная задача, но помимо начальных данных неизвестной считалась и вектор-функция

$f(t)$ (возмущение) в правой части уравнения движения. Тем самым, это линейная, но бесконечномерная задача. Исследовалась возможность построения оператора восстановления проекции $p \cdot q = J\big(y(\cdot)\big)$ неизвестного элемента $p = \big(x^0, f(\cdot)\big)$ на заданное направление в $\mathbf{R}^n \times L_2$.

Здесь автор позволит себе отступление, излишне не детализируя описание конкретных результатов. Н. Е. Кирин окончил матмех ЛГУ по специальности вычислительная математика. И, естественно, когда В. И. Зубов создавал свою школу теории управления ему "достался" привычный фронт работ: Н. Е. Кирин является автором одних из первых вычислительных методов оптимального управления. "Вычислительное прошлое" достаточно четко прослеживается в его научном наследии и, в частности, в рамках обсуждаемой тематики. Восстановить бесконечномерный обьект $p = \big(x^0, f(\cdot)\big)$ очень сложно. А нужно ли это? С позиций численных методов все равно храниться и использоваться будет конечномерное приближение. Восстановим конечное число "коэффициентов Фурье" элемента p, а "хвост и так потонет в погрешности самой модели". По-видимому, здесь сказалось не только влияние упомянутых выше авторов, но и публикации по методам регуляризации некорректных задач (прежде всего, работы научных школ А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова). Следует избегать избыточности постановки задачи, часто важно знать не само решение, а значения конечного числа функционалов на нем. Следующее обстоятельство, которое бросается в глаза: Н. Е. Кирин сразу переформулировал задачу в общих терминах операторного уравнения $A \cdot x = b$ $\big(A$ — уравнения модели, $b = y(\cdot)$, $x = \big(x^0, f(\cdot)\big)\big)$ и начал строить общую теорию восстановления проекций в терминах функционального анализа с учетом специфики именно задачи наблюдения. Это школа: фундаментальные работы Л. В. Канторовича по широкому внедрению в вычислительную математику идей функционального анализа, книги С. Г. Михлина, М. К. Гавурина, лекции которых слушал Николай Кирин в студенческие годы. Он скорее решал общую задачу, "подмеченную" на примере задачи наблюдения. Сейчас эта работа может показаться обычной, но всегда следует учитывать неумолимый фактор времени: часто работы потому и кажутся обычными, что десятилетия назад они кое-что значили и инициировали развитие.

К идее построения общей теории наблюдения и оценивания функционалов на решениях операторных уравнений Н. Е. Кирин возвращался неоднократно — в его книгах, как правило, есть параграф или глава, посвященная этой теме. Почему он не издал этот материал отдельной книгой или учебным пособием? Трудно сказать. По-видимому, он считал, что в отрыве от окрестности с более конкретным содержанием это будет слишком абсрактно. Если проследить развитие темы [2-5], то можно заметить, что возникали все новые постановки задач, но в абстрактных построениях всегда реализуется попытка обобщить на языке функционального анализа существенную часть содержания монографии. Оценивая этот, к сожалению, разбросанный по разным изданиям материал, можно утверждать, что Н. Е. Кириным разработана достаточно общая теория сопряженных задач оценивания функционалов на решениях операторных уравнений. Особое внимание при этом уделяется различного рода возмущений в уравнениях модели.

В [2-4] помимо общей теории представлен ряд конкретных задач: оценка компоненты решения системы линейных алгебраических уравнений, оптимальная квадратурная формула, интерполирование и дифференцирование функций на интегральных многообразиях, наблюдение компоненты фазового вектора, её оптимальное представление с учетом ошибок аддитивных параметров, идентификация возмущения, прогнозирование компоненты (в том числе и по дискретным измерениям), наблюдаемость на переменном интервале ... Общая методология состоит в построении сопряженных задач и использовании их решений при оценке погрешностей. Оптимизация оценивания сводится к прямым методам минимизации этих оценок численно (выпуклое программирование, множители Лагранжа, ...).

Следующий крупный блок научных интересов Н. Е. Кирина — наблюдение и оценивание в нелинейных системах. Вместо общей постановки проблемы обращения отображения $x(T) \mapsto y(\cdot)$ он предложил сосредоточить усилия на более конкретной и "экономичной" задаче восстановления нелинейной компоненты $\varphi\big(x(T)\big)$ в интегральной форме:

$$\varphi\big(x(T)\big) = \int_0^T k\big(\tau, y(\tau)\big)\, d\tau \quad \forall\, x(T) \in U_T.$$

Если, в частности, нужен полный фазовый вектор, то можно варьировать весовые функции $k = k_i$ обработки измерений. При этом, в отличие от метода последовательного дифференцирования выхода, каждый интегральный оператор “работает” независимо и обладает определенной помехоустойчивостью. Полный фазовый вектор нужен далеко не всегда. Например, для формирования значений управления с обратной связью $u\bigl(x(t)\bigr)$ по предыстории измерений на $[t-T,t]$ можно сразу строить алгоритм восстановления компоненты $\varphi = u$, минуя промежуточное определение $x(t)$, если даже последнее возможно по конкретному набору измерений.

В паре (φ, k) можно по-разному выделять причину и следствие. Выберем интересующую нас φ — получаем задачу построения весовой функции k. Фиксируем k — необходимо дать аналитическое описание той компоненты φ, значения которой и определяются после интегрирования $k\bigl(\tau, y(\tau)\bigr)$ на $[0,T]$. Задача имеет операторную формулировку. Заслуга Н. Е. Кирина в том, что он свел её к линейной краевой задаче для “поточечного” уравнения типа переноса. Это конструктивный шаг, если учесть богатый арсенал численных методов для подобного класса задач математической физики. В частности, можно эффективно использовать прямые методы, в то время как исходная задача — обратная. Для этого он ввел в рассмотрение функцию

$$v(t,x) = \int_0^t k\bigl(\tau, y(\tau\,;\,x,t)\bigr)\,d\tau,$$

где под интегралом именно тот выход $y(\cdot)$, который соответствует движению с началом (концом) x в момент t. Наблюдение φ приводит к краевому условию $v(T,\cdot)=\varphi$, а начальное тривиально: $v(0,\cdot)=0$. Эти две точки-функции “связаны” сопряженным уравнением

$$v_t(t,x) + v_x(t,x)\cdot f(t,x) = k\bigl(t, g(t,x)\bigr).$$

Возникновение уравнения в частных производных естественно, поскольку нелинейная задача наблюдения решается для области фазового пространства. Интерпретация в терминах теории управления: в линейной системе (ей можно придать стандартный вид $\dot z = Az + Bk$, фазовое состояние — $z = v(t,\cdot)$) требуется выбором управления перевести v из нуля в φ за время T. Развитие этой идеи привело к обобщению на нелинейный случай известного принципа двойственности в линейной теории наблюдения и управления.

Эта общая методика (хотите изучать динамику — изучайте поведение функций и функционалов на траекториях) очень характерна для работ В. И. Зубова и его ученик, естественно, хорошо знал аппарат функций Ляпунова.

Разумеется, это лишь основная идея, в монографиях [2-4] содержится её разработка: с учетом возмущений в связях, прямые методы идентификации параметров и фазовых характеристик, системы с последействием и дискретным временем, абстрактные динамические системы. Достаточно подробно представлена соответствующая математическая техника. В целом эти результаты Н. Е. Кирина можно квалифицировать как развитие ("расширение сферы влияния") теории функций Ляпунова и тесно с ней связанного динамического программирования Беллмана для задач наблюдения-оценивания-прогнозирования. Ключевым моментом является построение сопряженных задач и использование их решений для представления погрешности, оценки которой могут быть минимизированы прямыми численными методами.

Следующая крупная тема — оценивание в распределенных системах [2-5]. Рассматриваются стандартные уравнения математической физики (теплопроводности, диффузии, волновое) и анализируются возможности наблюдения-оценивания-прогнозирования компонент (функционалов на решениях) при различных составах измерителей. Конечно же, занявшись этой темой, Н. Е. Кирин "вложил" в неё весь накопленный математический опыт. Сама идея использования в задачах математической физики сопряженных уравнений (преобразования Лагранжа) не нова — это поле деятельности давно и успешно освоено школой Г. И. Марчука. Отличие состоит в том, что Н. Е. Кирин достаточно подробно развил математический аппарат сопряженных задач с учетом ошибок измерений и различного рода возмущений в уравнениях "движения", известных лишь в оценочном плане. Рассмотрены различные задачи оценивания пространственных, временны́х компонент, компонент градиента, функции источников-стоков, оценивание компонент по граничному наблюдению, оптимизация оценок погрешности, построение ε-наблюдаемых направлений, ретроспективное оценивание, оценивание на основе усредненных наблюдений и т. д. Это определенный синтез методов сопряженных задач и теории наблюдения-управления в условиях неопределенности, "законодателем мод" которой является екатеринбургская школа (Н. Н. Красовский, А. Б. Куржанский, Ю. С. Осипов и др.). Решения сопряженных задач, опять же, используются для представления погрешности — Н. Е. Кирин всегда уделял пристальное внимание вычислительным аспектам проблемы. Излишне, наверное, напоминать, что результаты обобщались вплоть до “идентификации и управления проекциями решений функциональных уравнений”.

Развивая новые темы, Н. Е. Кирин не забывал “старые”, постоянно их модифицируя применительно к текущим задачам. В его работах часто можно встретить словосочетание оценочная система. Смысл в том, чтобы для расширенной более простой (опорной, оценочной, аппроксимирующей) системы построить первый интеграл (если угодно — всю ту же функцию Ляпунова), а о тех или иных свойствах функционалов судить по изменению этой функции на траекториях исходной управляемой системы. В частности [1-4], эта техника интегрального представления функционалов позволяет получить классические результаты (принцип максимума Понтрягина, уравнение Беллмана) и их развить (метод оптимального демпфирования Зубова в случае неполной обратной связи, для систем с запаздыванием, с дискретным временем). Численные методы, включая оптимальное быстродействие, постоянно модифицировались и обобщались. Алгоритмы наблюдения рассматривались не только сами по себе, но и как аппарат решения задачи стабилизации по неполной обратной связи [2-4]. Трудно перечислить все задачи, которыми за почти 40-летний творческий период занимался Н. Е. Кирин. В данном кратком обзоре автор старался лишь отметить основные направления исследований (и не в обиду соавторам тех или иных работ не останавливаемся на их заслугах).

Последняя монография Н. Е. Кирина [4] вышла в 1993 г. В последние годы он чувствовал новый творческий подьем и явно назревала новая книга. Жаль, что по трагической случайности этим творческим планам сбыться было не суждено. Осталась какая-то недосказанность. Впрочем, в науке трудно расставлять знаки препинания, особенно точки, даже промежуточные. Остались ученики (среди них 4 доктора и более 20 кандидатов наук) — а значит идеи, высказанные подчас “всего лишь” в форме замечаний и обсуждений, будут развиваться.

Указатель литературы

1. *Кирин Н.Е.* Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. Л., 1975. 160 с.
2. *Кирин Н.Е., Исраилов И.* Оценочные системы в задачах теории управления. Ташкент, 1990. 160 с.
3. *Н.Е. Кирин, Исраилов И., Отакулов С.* Задачи и методы оценивания управляемых систем. Ташкент, 1993. 229 с.

4. *Н.Е. Кирин.* Методы оценивания и управления в динамических системах. СПб., 1993. 308 с.
5. *Иванов А.П., Кирин Н.Е.* Сопряженные задачи теории управления. Учебное пособие. Л., 1988. 89 с.

Н.Д. Морозкин

МНОГОШАГОВЫЙ ДВОЙСТВЕННЫЙ АЛГОРИТМ Н.Е. КИРИНА
(ОБЗОР)

Одним из интересных направлений, развитых профессором Н.Е. Кириным является разработка методов решения задач быстродействия в регулируемых системах. Задача состоит в нахождении наименьшего значения t^0 вещественного параметра t , при котором переменное множество S(t) (область достижимости), определенное в некотором пространстве P и зависящее от параметра t, "достигнет" заданной точки p_0 в P. Множество S(t) при этом зависит от управления, а значение параметра t^0 соответствует оптимальному управлению. Наиболее простой задачей подобного типа является двухточечная линейная задача быстродействия, а именно: найти управление $u^0 \in U$, переводящее систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t) + B(t)u + D(t)$$

из положения $x^0_{R^n}$ в положение $x^*_{R^n}$ за минимальное время. Множество достижимости S(t) представляет собой множество точек пространства R^n из которых можно попасть в точку $x^0_{R^n}$ за время меньшее либо равное t. Геометрически задачу можно интерпретировать в виде: требуется найти наименьший момент времени t, при котором множество S(t) достигает точки $x^0_{R^n}$.

На основе приведенной выше геометрической интерпретации Л. Нейштадтом и Дж. Итоном [1, 2] был предложен алгоритм поиска оптимального управления. Однако алгоритм очень медленно сходился и не позволял решать многие задачи за реальное машинное время.

Независимо от этих авторов в 1963 году Н.Е. Кириным [3] был предложен алгоритм решения задачи линейного быстродействия, который также опирался на описанную выше геометрическую интерпретацию (метод разделяющих гиперплоскостей). В отличие от алгоритма Итона-Нейштадта было проведено теоретическое обоснование сходимости предложенного алгоритма и указан достаточно удобный способ выбора нормалей разделяющей опорной гиперплоскости, основанной на поиске точки, в которой достигается минимум функции типа "расстояния" от достижимого множества S(t) до требуемой точки $x^*_{R^n}$ (антиградиент этой функции и есть направление нормали разделяющей гиперплоскости). При построении очередного приближения используется ближайшая точка, полученная на предыдущей итерации и точка опоры, полученная на текущей итерации. Далее в работах [4-8] предложенный алгоритм был модифицирован для решения более общих задач быстродействия, в частности, для решения задач линейного быстродействия с линейными фазовыми ограничениями, а также для решения задач быстродействия для линейных систем с запаздывающим аргументом.

Однако, несмотря на то, что по сравнению с алгоритмом Итона-Нейштадта скорость сходимости алгоритма Н.Е. Кирина была выше, вопрос этот по-прежнему был актуален. Так, американскими математиками Э.Д. Фадденом и Э.Г. Гильбертом [9] в случае, когда линейная система дифференциальных уравнений автономна был предложен способ ускорения сходимости алгоритма Итона-Нейштадта, основанный на вычислении собственных значений матрицы A. В работе Б.Н. Пшеничного и Л.А.Соболенко [10] была предложена еще одна модификация алгоритма Итона-Нейштадта, в которой выбор направления нормали разделяющей гиперплоскости на каждой итерации осуществляется путем привлечения идей сопряженных градиентов. Как показали вычислительные эксперименты сходимость алгоритма Фаддена-Гильберта выше, чем у Итона-Нейштадта (примерно такая же, как сходимость алгоритма Н.Е. Кирина), а алгоритм Пшеничного-Соболенко в свою очередь сходится быстрее, чем алгоритм Фаддена-Гильберта.

Несмотря на это, проблема улучшения скорости сходимости и уменьшения трудоемкости алгоритмов решения задач линейного быстродействия по-прежнему была актуальной, особенно при решении нелинейных задач, в которых приходилось решать задачи линейного быстродействия на каждой итерации. Работая в этом направлении Н.Е. Кириным был предложен так называемый "многошаговый двойственный алгоритм" [11], в котором аналогично идее многошаговых методов спуска сходятся при выборе направления нормали разделяющей гиперплоскости на каждой итерации использовалась не одна точка, полученная на предыдущей итерации, а несколько. Точка, в которой реализуется минимум функций "типа расстояния" ищется на выпуклой оболочке искомых точек. Сходимость алгоритма при этом существенно зависит от выбора этих дополнительных точек. Так, в работе [11] в качестве вспомогательных точек использовались полученные на итерациях приближения точки $x^*_{R^n}$. При таком подходе эффект многошаговости сказывается только на первых итерациях. По мере приближения к конечной точке $x^*_{R^n}$ эти "ближайшие" точки сгущаются и эффект многошаговости теряется. В работе [12] в качестве дополнительных точек было предложено использовать полученные на итерациях опорные точки, т.е. точки характеризующиеся тем, что гиперплоскости проведенные через них являются опорными к достижимому множеству S(t). Такой выбор позволит достичь достаточной "разброс" дополнительных точек на итерациях и обеспечить более полное использование идеи многошаговости.

Полученный алгоритм, как показали вычислительные эксперименты, имеет не только более высокую скорость сходимости, но и значительно меньшую трудоемкость каждой отдельной итерации. В работе [12] показано эффективная работа алгоритма при решении линейных задач оптимального по быстродействию нагрева с линейными ограничениями на фазовые переменные. В настоящем сборнике предложена модификация алгоритма Н.Е.Кирина, предназначенная для решения линейных задач быстродействия с нелинейными ограничениями на фазовые переменные (см. Морозкин Н.Д., Морозкин Ю.Н. Итерационный метод решения задачи оптимального нелинейного нагрева с ограничениями на термонапряжения и на наибольшую температуру).

Указатель литературы

1. *Neustadt L.* Sinthesizing time-optimal control systems // Math. Anal. and Appl. 1960. v. 1. №4. P. 484-492.

2. *Eaton J.H.* An Iterative solution to time optimal control // Math. Anal. and Appl. 1962. v. 5. №2. P. 329-344.

3. *Кирин Н.Е.* Об одном численном методе в задаче о линейных быстродействиях. - В кн.: Методы вычислений. Л., 1963. С. 67-74.

4. *Кирин Н.Е.* К решению общей задачи быстродействия // Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25. №1. С. 16-22.

5. *Кирин Н.Е.* К численному решению общей задачи математического программирования // Докл. АН УзССР. 1965. №6. С. 3-8.

6. *Кирин Н.Е.* Программная оптимизация линейных систем с последствиями // Автоматика и телемеханика. 1965. Т. 26. №1. С. 3-10.

7. *Кирин Н.Е.* Один итеративный метод решения экстремальных задач // Автоматика и телемеханика. 1966. Т. 27. №10. С. 3-12.

8. *Кирин Н.Е.* Вычислительные методы теории оптимального управления. Л., 1968. 114 с.

9. *Fadden E.J., Gilbert E.G.* Computational Aspects of the Time-Optimal Control Problem // Computing methods in optimization problems. Balakrichnan A. (eg), 1964. P. 167-182.

10. *Пшеничный Б.Н., Соболенко Л.А.* Ускоренный метод решения задач линейного быстродействия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. Т. 8. №6. С. 1345-1351.

11. *Кирин Н.Е.* Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. Л., ЛГУ. 1975. 160 с.

12. *Кирин Н.Е. Морозкин Н.Д.* Численные приближения экстремалей управляемых динамических систем. Учебное пособие. Уфа, 1989. 88 с.

13. *Морозкин Н.Д.* Оптимальное управление одномерным нагревом с учетом фазовых ограничений // Математическое моделирование. 1996. Т. 8. №3. С. 91-110.

РАЗДЕЛ II

Неопубликованные математические работы Н.Е. Кирина

Н.Е. Кирин

СОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ, ИДЕНТИФИКАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ*

АННОТАЦИЯ

В докладе рассматриваются вопросы построения управления в системах, описываемых дифференциальными уравнениями или интегро-дифференциальными включениями. Одним из этих вопросов является задача идентификации или оценивания функции фазовых координат (компоненты) управляемой системы по сигналам обратной связи. Конструктивные методы решения этой и других задач обсуждаются с позиций общего подхода, состоящего в построении и решении так называемых сопряженных (дуальных) задач управления.

Для задачи идентификации компоненты нелинейной динамической системы вводится сопряженная задача в форме граничной задачи для линейного уравнения в частных производных первого порядка с управляющей функцией, которая определяет ядро искомого интегрального оператора обработки сигнала обратной связи (идентификатора). Изучается возможность конструктивного решения сопряженной задачи на основе сплайновых приближений с использованием идей регуляризации. Исследуется также возможность оптимального оценивания компоненты с помощью таких идентификаторов при возмущениях в исходной динамической системе.

Для задачи синтеза управления по обратной связи в нелинейной динамической системе дается модификация метода оптимального демпфирования В.И.Зубова, которая состоит в дополнении исходной системы дифференциальными уравнениями, представляющими идентификатор синтезирующей управление функции (функционала) сигналов обратной связи. Метод Зубова в расширенной системе позволяет строить одновременно приближения оптимального управления и соответствующего идентификатора. Предельные

*). От редактора. Ниже приводимые тексты публикуются тождественно текстовым файлам, существующим в архиве Н.Е. Кирина. Редакция приводимых ниже материалов является весьма “сырой” и вряд ли они были бы опубликованы самим Н.Е. в таком виде.

соотношения в процессе приближений приводят к своеобразному уравнению Айзекса-Беллмана.

В задаче управления векторными интегро-дифференциальными включениями исследуется схема построения сопряженной задачи, которая в свою очередь может решаться прямыми методами минимизации квадратичных функционалов. Схема обладает достаточной универсальностью, поскольку исходные включения охватывают как системы с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами.

Санкт-Петербургский государственный университет

Россия, г. Санкт-Петербург

СОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ, ИДЕНТИФИКАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ*

Н.Е. Кирин

В докладе рассматриваются вопросы построения управления в системах, описываемых дифференциальными уравнениями или интегро-дифференциальными включениями. Одним из этих вопросов оказывается задача идентификации и оценивания функций фазового состояния управляемого процесса. Под оцениванием функции мы здесь понимаем определение верхней и (или) нижней грани её значений. Эта и другие задачи анализируются с помощью единой методы построения т.н. сопряженных (дульных) задач управления. Исходной базой для исследования изложенных далее задач были для автора работы академика Н.Н. Красовского и ч.л.-корр. РАН В.И. Зубова, из которых сошлемся, прежде всего, на монографии [1, 2].

1. *Оценивание и управление в линейных интегро-дифференциальных включениях.*

Пусть D - область в R^m, $x \in C^{(1)}(D, R^n)$, $u \in C(D, R^v)$ - функции, которые связаны дифференциальным включением

$$L_1(x,u) \equiv \sum_{j=1}^{m} A_{0j}(t)\frac{\partial x}{\partial t_j} + A_1(t)x(t) + B_1(t)u(t)+$$

$$+\int\limits_D \{A_2(t,r)x(r) + B_2(t,r)u(r)\}\,dr \in \Phi_1(t), \qquad t \in D. \qquad (1)$$

Здесь t_j - компоненты m-мерного аргумента t, Φ_1(t) - заданное непрерывное по аргументу t (в метрике Хаусдорфа) семейство множеств в R^s, A_k(t) и B_k(t) - непрерывные матрицы соответствующих

---

*). Текст доклада, который предполагался быть сделанным Н.Е. Кириным на Межвузовской региональной научно-практической конференции “Методика преподавания математики в высших и средних учебных заведениях” в ЛГОПУ (г. Пушкин) 16 мая 2000 года.

размерностей. Вектор-функцию x(.) назовём управляемым процессом, u(.) - управлением из класса U, который пока не оговариваем.

Общая задача управления: на решениях включения (1) - парах (x,u) - обеспечить включение

$$L_2(x) \equiv C_1(t)x(t) + \int\limits_D C_2(t,r)x(r)\,dr \,\in\, \Phi_2(t), \qquad t \,\in\, D. \tag{2}$$

Здесь Φ_2(t) - параметрическое семейство множеств в R^p и матрицы C_k - обладают теми же свойствами, что и аналогичные компоненты включения (1).

Частной задачей можно считать построение пары (x,u), удовлетворяющей включениям (1), (2). Общим местом в этих задачах является задача обеспечения за счет выбора управления неравенства

$$q_x^+ \equiv \sup_x\{\langle q(.), L_2(x)\rangle\} \le \sup_x\{\langle q(.), f_2(.)\rangle : f_2 \,\in\, \Phi_2(.)\} \equiv q_\Phi, \tag{3}$$

в котором верхняя грань слева берется только в общей задаче по всем управляемым процессам (из решений включения (1)), ломаными скобками указано скалярное произведение в $(L_2(D))^p$, а $q \in C(D, R^p)$ - произвольная вектор-функция, для которой верхняя грань справа в (3) конечна. Множество таких функций q обозначим Q.

Как известно, выполнение неравенства (3) при всех $q \in Q$ необходимо и в случае выпуклых замкнутых множеств Φ_1,Φ_2 достаточно для существования решения поставленной общей задачи.

Обозначим для краткости скалярное произведение слева в (3) q_x и проведем традиционное Лагранжево преобразование с этим функционалом на связях (1). Это приведёт к представлению

$$q_x = \int\limits_D \{\Psi^T(t) f_1(t) - \beta(t)u(t)\}\,dt + \int\limits_D L^*(\Psi, q)x(t)\,dt, \tag{4}$$

где $\Psi \in C^{(1)}(D, R^p)$ - гладкая p-мерная вектор-функция с носителем в открытой области D, ^{T} - знак транспонирования (все векторные величины понимаются как одностолбцовые матрицы), $f_1 =$ $= L_1(x, u)$, остальные величины определены формулами:

$$L^*(\Psi, q) = L_1^*(\Psi) + L_2^*(q),$$

$$L_1^*(\Psi) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial(\Psi^T A_{0j})}{\partial t_j} - \int\limits_D \Psi^T(r) A_2(r,t)\, dr - \Psi^T(t) A_1(t),$$

$$\beta(t) = \Psi^T(t) B_1(t) + \int\limits_D \Psi^T(r) B_2(r,t)\, dr, \tag{5}$$

$$L_2^*(q) = q^T(t) C_1(t) + \int\limits_D q^T(r) C_2(r,t)\, dr.$$

На основе общей теории двойственности в линейном программировании для задачи о верхней грани в левой части неравенства (3) можно установить наличие двух альтернатив:

$$1)\ q_x^+ = +\infty, \qquad 2)\ \exists\, \Psi: \quad L^*(\Psi, q) = 0. \tag{6}$$

Альтернатива 1) означает, что неравенство (3) в общей задаче невозможно, т.е. решение этой задачи не существует. Альтернатива 2) подразумевает существование, по крайней мере, обобщенного решения указанного сопряженного уравнения. Под этим мы понимаем существование последовательности $\{\Psi_N\}$, на которой последний интеграл в (4) равномерно на множестве решений x(.) включения (1) стремится к нулю. На такой последовательности главной составляющей q_x в представлении (4) будет первый интеграл, по которому и следует выбором управления u(.) обеспечивать неравенство (3) при всех возможных $f_1 \in \Phi_1,\ q \in Q$. Таким образом, приходим к следующему виду необходимого и в указанном выше смысле достаточного условия выбора управления $u \in U$ как решения системы неравенств:

$$\lim_{k \to +\infty} \sup\{ \int\limits_D (\Psi_N^T f_1 - \beta_N u)\, dt : \quad f_1 \in \Phi_1\} \leq q_\Phi, \quad q \in Q. \tag{7}$$

Отметим, что здесь каждая последовательность $\{\Psi_N\}$ сопряженных переменных соответствует функции q по сопряженному уравнению (6), а величина β_N определяется по $\Psi = \Psi_N$ третьей формулой (5).

В качества класса U управлений в общем случае можно рассмотреть класс отображений вида $u = u(t, x(.)|_{D(t)})$, принимающих значения в заданном множестве $U(t) \subset R^v$ и таких, что замкнутое отображением этого класса включение (1) имеет гладкие решения x(.). Здесь $x(.)|_{D(t)})$ - сужения функции x(.) на заданные подмножества $D(t) \subset D$. Желание ограничится гладким классом решений x(.) не противоречит практической значимости рассматриваемой задачи и позволяет использовать простые аппроксимационные схемы в представлении и численном решении системы неравенств (7). При этом разумеется и применение методов регуляризации в решении сопряженного уравнения (6), которые и породят соответствующие последовательности $\{\Psi_N\}$ [3]. Пример такого подхода в задаче оценивания будет дан в следующем разделе.

Включения (1), (2) через размерность переменной t могут представлять системы как с сосредоточенными так и с распределёнными параметрами. В этих включениях можно учесть и условия на границе области D, в том числе влияние граничного управления. Поставленную задачу несложно дополнить требованием экстремальности управления. Для этого одну из компонент включения (2) следует принять за критерий качества и в системе неравенств (7) потребовать экстремальности соответствующей компоненты q_Φ. Очевидно также, что включения (1),(2) могут быть не только “поточечными”, но и общефункциональными. Это позволит рассматривать в рамках данной схемы такие задачи как построение оптимальных квадратурных формул или формул численного интерполирования и дифференцирования на различных классах функций [4,5].

2. *Идентификация и оценивание компоненты динамической системы.*

Рассмотрим динамическую систему с фазовым состоянием $x(t) \in R^n$, наблюдаемую по сигналу y(.) при связях

$$x' = f(x, \xi), \quad y(t) = g(x(t), \eta), \quad t \in [0, T]. \tag{8}$$

Здесь x' - производная функции x = x(t) по времени t, ξ и η - параметры возмущения связей (8), f(.) и g(.) - заданные функции, $y(t) \in R^q$.

Требуется по предъявляемым функциям y(.) (реализациям сигнала обратной связи) и связям (8) восстанавливать (оценивать) величину (компоненту) $\varphi_T = \varphi(x(T))$. Здесь $\varphi(.)$ - заданная функция в R^n.

Будем далее предполагать, что решения x = x(t) первой системы в (8) существуют, единственны и продолжимы на [0,T] при любых начальных состояниях $x(0) = x^{(0)} \in R^n$ (условия (A)). Тогда универсальной формой представления (аппроксимации) компонеты φ_T системы (8) является интеграл

$$\varphi_T = \Phi(y(.)) \equiv \int\limits_0^T k(t, y(t))\, dt \tag{9}$$

или композиция таких интегралов [6]. Интеграл (9) как операцию над сигналом обратной связи y(.) назовем идентификатором компоненты φ_T на связях (8), а функцию k(.) - ядром идентификатора. Для отыскания ядра k(.) полезна следующая теорема [7].

Теорема 1. *Пусть в связях* (8) *функции* f *и* g *непрерывны, фиксированы некоторые непрерывные возмущения* $\xi = \xi(t, x)$, $\eta = \eta(t, x)$ *и выполнены условия (A). Для того чтобы функция k(.) была ядром идентификатора* (9) *необходимо и достаточно существования решения* $\Psi = \Psi(x, t)$ *граничной (сопряженной) задачи*

$$L^*(\Psi) \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} f(x,\, \xi) = k(t,\, g(x,\, \eta)),$$

$$\Psi(x, 0) = 0, \quad \Psi(x, T) = \varphi(x). \tag{10}$$

Уравнение (10) *рассматривается в полосе* $S = R^n \times [0, T]$.

Таким образом построение идентификатора (9) можно связать с решением относительно пары (Ψ, k) линейной граничной задачи (10) (сопряженная задача управления). Кратко рассмотрим регуляризацию метода минимизации невязки в этой задаче.

Пусть X_0 - множество начальных точек x^0 первой системы в (8), траектории $x(t) = x(t, x^0)$ из которых не покидают область D, при этом $X_0 \subset P_0$, $D \subset P \subset R^n$, P_0, P - замкнутые координатные промежутки в R^n. Пусть также соответствующие указанным траекториям сигналы y(t) обратной связи лежат в замкнутом координатном промежутке $G \subset R^m$. Возьмём полные счетные системы функций $\{v_\mu(x)\},\ \{w_\nu(y)\}$ соответственно в $C^{(1)}(P)$ и в C(G) и будем строить аппроксимации $\Psi_N(.),\ k_N(.)$ решения $(\Psi,\, k)$ задачи (10) в виде

$$\Psi_N(t, x) = \sum_{\mu=1}^{N} \Psi^{(\mu)}(t) \nu_\mu(x), \quad k_N(t, y) = \sum_{\nu=1}^{N} k^{(\nu)}(t) w_\nu(y). \tag{11}$$

Коэффициенты $\Psi^{(\mu)}$, $k^{(\nu)}$ будем отыскивать из условия минимума функционала

$$J(\Psi^{(\mu)},\, k^{(\nu)}) = \iint\limits_{S_0} (L^*(\Psi_N) - k_N)^2 dxdt +$$

$$+ \int\limits_P (\Psi_N(x,T) - \varphi(x))^2 dx + \varepsilon \int\limits_0^T \sum_{\nu=1}^N |k^{(\nu)}|^2 dt \qquad (12)$$

при условии $\Psi^{(\mu)} = 0$. Здесь $S_0 = P \times [0,T]$, $\varepsilon > 0$ - параметр регуляризатора [3].

Приближениями Φ_N идентификатора Φ будем считать интегральные операции (9), в которых ядро k(.) заменяется функциями k_N из пар (Ψ_N, kN) вида (11), минимизирующих функционал (12) при $\varepsilon = \varepsilon_N \to +0$, $N \to +\infty$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и многочлены* (11) *при* N = 1,2,... *составляют плотную систему соответственно в* $C^{(1)}(S_0)$ *и* $C([0,T] \times G)$. *Тогда последовательность операторов* Φ_N *сходится к* Φ *в среднем на* P_0:

$$r(k_n) = \int\limits_{P_0} |\Phi_N(y(g(x(.,x^0),\eta)) - \varphi(x(T,x^0)|dx^0 \to 0 \textit{ при } N \to \infty.$$

Под интегралом y(.) - *функции сигналов обратной связи* (8) *на траекториях первой системы* (8).

В работе [8] в качестве функций v_μ, w_ν в полиномах (9) рассмотрены мономы, составленные из гладких параболических базисных сплайнов. При этом предполагалась автономность функций $f(x,\xi) \equiv f(x)$, $g(x,\xi) \equiv g(x)$ для указанных теоремой 1 фиксированных возмущений. В этом случае соответствующее задаче минимума квадратичного функционала (12) уравнение Эйлера представляет собой начальную задачу для линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $\Psi^{(\mu)}$ с постоянными разряжёнными матрицами при неизвестных. Особенностью получения этих матриц является то, что их коэффициенты находятся интегрированием указанных сплайнов по взаимным пересечениям их малых относительно диаметра промежутка P носителей с прообразами носителей мономов $w_\nu(y)$ при отображениях

$w_\nu(g(x)) : P \to R^m$. Полученная начальная задача может решаться численными методами интегрирования.

В случае произвольных возмущений $\xi \subset \Xi$, $\eta \subset H$ операторы Φ_N можно использовать для оценки компоненты φ_T. При этом для решения задач о минимуме функционала (12) следует фиксировать такие возмущения, при которых колебание погрешности r_N на множестве $\Xi \times H$ будет минимально [4,7]. Другой путь учета возмущений состоит в рассмотрении их как дополнительных фазовых переменных [8].

3. *Метод последовательного демпфирования в задаче управления по обратной связи.*

Первое уравнение (8) дополним управляющим функциональным параметром u(.), а функцию сигналов обратной связи y(.) подвергнем на каждом временном отрезке [0,t] интегральной обработке по типу операции (9). Возмущения $\xi,\ \eta$ будем считать отсутствующими или фиксированными как известные функции переменных x, t. Это приведёт к следующей системе связей

$$x' = f(x, u, t), \quad z' = k(y, z, t), \quad y(t) = g(x(t)), \quad t \in [0, T]. \qquad (13)$$

Здесь z дополнительная переменная размерности $p \leq n$. Синтез управляющего сигнала u(.) будем отыскивать в классе функций $u = u(y, z, t)$, принимающих значение в компакте $\Omega \subset R^m$. При этом функцию k(.) также считаем искомой, т.е. - ещё одним управлением расширенной системой (13) со значениями в ограниченном множестве K. Критерием оптимальности синтезированной указанным образом системы (13) примем минимальность компоненты $\varphi^T = \varphi(x(T))$.

Будем строить минимизирующую последовательность управляющих пар (u_N, k_N) в системе (13) по методу оптимального демпфирования [2]. Это означает, что для каждого номера N = 1,2,... строится функция $V_N = V_N(x, z, t)$ как решение следующей начальной задачи:

$$\frac{\partial V_N}{\partial t} + \frac{\partial V_N}{\partial x} f(x, u_N, t) +$$

$$+ \frac{\partial V_N}{\partial z} k_N(g(x), z, t) \equiv w_N(x, z, u_N, k_N, t) = 0, \qquad (14)$$

$$V(x, z, T) = \varphi(x), \quad x \in R^n, \quad z \in R^p, \quad t \in [0, T].$$

Введем множество $D_N = D_N(y,z,t)$ состояний $x(t) = x(t,u_N,k_N,x^0,z^0)$, в которых может оказаться управляемая система (13) в момент t при условии, что y=y(t), z=z(t) в силу связей (13) при $u = u_N$, $k = k_N$, а начальные состояния $x^0 \in R^n$, $z^0 \in R^p$ в остальном произвольны. Теперь новая пара (u_{N+1}, k_{N+1}) выбирается из условия минимума на $\Omega \times K$ функции w_N, введенной в (14):

$$(u_{N+1}, k_{N+1}) =$$

$$= arg \min_{u,k} \max_{x} \{ w_N(x,z,u,k,t) : \; x \in D_N, \; u \in \Omega, \; k \in K \}. \qquad (15)$$

Если указанные построения возможны, то на последовательности управлений $\{u_N, k_N\}$ гарантируется убывание компоненты $\varphi_T = \varphi(x(T,u_N,k_N,x^0,z^0))$ [2,4]. Стационарной парой (u_0,k_0) такого процесса будет пара (u_N,k_N), при которой минимакс (15) равен нулю в каждой точке $(y,z,t) \in R^q \times R^p \times [0,T]$. Это условие является достаточным и при некоторых дополнительных требованиях необходимым условием оптимальности пары (u_N,k_N) в поставленной задаче синтеза управления системой (13). По форме оно схоже с уравнением Айзекса-Беллмана. Эта схожесть усилится, если в связи (13) внести возмущения ξ, η по типу связей (8). При геометрических ограничениях $\xi(t,x) \in \Xi(t,x)$, $\eta(t,x) \in H(t,x)$ это приведёт к добавлению в (15) внутреннего максимума по возмущениям в пределах указанных множеств $\Xi(t,x)$, $H(t,x)$.

С учетом сказанного можно также утверждать, что изложенный метод несложно модифицироть для решения дифференцильных игр. Например, для построения антогонистической игры двух лиц с нулевой суммой и платёжной функцией φ_T следует в (13) разделить на две компоненты динамическую информацию $y = (y_1,y_2)$, $z = (z_1,z_2)$ о ходе игры и управления $u = (u_1,u_2)$, $k = (k_1,k_2)$, $u_i = u_i(y_i,z_i,t)$, $k_i(y_i,z_i,t)$ (i =1,2 - номера игроков):

$$x' = f(x,u,t), \quad z_i' = k_i(y_i,z_i,t), \quad y_i(t) = g_i(x(t)), \quad t \in [0,T], \; i = 1,2.$$

В этом случае формулу (15) также следует писать по выделенным компонентам управлений и разделить операции min и max по этим компонентам в соответствии с целями игроков.

Практическая реализация алгоритма (15) предполагает решение уравнения (14) в ограниченной области с использованием дискретных методов, в частности, упомянутого в п.2 метода конечных элементов. Здесь мы не будем анализировать известные подходы к формированию условий на функции, входящие в связи (13), и требования к методам приближенного отыскания экстремумов (15), при которых реализация алгоритма может обеспечить сходимость к стационарной паре и оптимальному по минимуму компоненты φ_T управлению по неполной обратной связи первым уравнением в (13) [2,4]. Цель даной работы акцентировать внимание на возможности эффективного использования сопряженных задач оценивания компонент в конструктивных методах теории управления.

У к а з а т е л ь   л и т е р а т у р ы

[1]. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., Наука, 1968. 476 с.

[2]. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М., Наука, 1975. 496 с.

[3]. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М., Наука, 1981. 400 с.

[4]. *Кирин Н.Е.* Методы оценивания и управления в динамических системах. СПб., Изд. СПб. ун-та. 1993. 308 с.

[5]. *Кирин Н.Е.* К методам численного приближения функционалов на классах дифференцируемых функций. // М., 1999. Деп. в ВИНИТИ 06.07.99. №2195- В99. 10 с.

[6]. *Кирин Н.Е.* К теории наблюдаемости и прогнозирования в нелинейных управляемых системах.//Сб. научн. трудов "Управление, надёжность, навигация". Саранск: Изд. Морд. Ун-та. 1984. С. 130-136.

[7]. *Иванов А.П., Кирин Н.Е.* Сопряженные задачи теории управления. СПб., Изд. СПб. ун-та. 1988. 88 с.

[8]. *Кирин Н.Е.* Метод конечных элементов в задаче идентификации динамических систем.// М., 1997. Деп. в ВИНИТИ 31.12.97. №3870 В-97. 12 с.

РАЗДЕЛ III

Оригинальные математические работы, посвященные памяти Н.Е. Кирина

Ю. З. Алешков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЛН НА ВОДЕ

В природных условиях волны наблюдаются на реках, озерах, водохранилищах, морях и океанах. Они вызываются различными причинами, в том числе притяжением луны, сейсмическим воздействием. Характерными факторами образования волн на воде являются воздействие ветра на водную поверхность — ветровые волны, движение тела над или под свободной поверхностью. Волны на воде очень разнообразны как по высоте, так и по длине. Они могут быть как очень пологими, так и крутыми.

Морская вода представляет собой сложную структурированную среду, ее следует рассматривать как смесь чистой воды, соли и других компонент. Обычно считают эту смесь гомогенной. Однако в ряде случаев рыхлого дна ее представляют гетерогенной [1]. Но даже для физически однородной жидкости говорят о ее стратификации по плотности, когда необходимо учитывать изменение плотности с глубиной. В этом случае имеют место внутренние волны или волны на поверхности раздела слоев разной плотности в отличие от поверхностных волн.

Методы изучения волновых движений жидкости — теоретическое рассмотрение законов ее движения как сплошной среды с соответствующими реологическими свойствами и организация физического эксперимента как в лабораторных, так и в натурных условиях. В данной статье ограничимся вопросами математического моделирования волн на воде.

Л. Эйлер [2] на основе законов сохранения массы и количества движения идеальной жидкости получил уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \rho \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \vec{\mathcal{F}} - \frac{1}{\rho} \bigtriangledown p,$$

где $\rho = \rho(x, y, z, t)$ – плотность; $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ – скорость; $p = p(x, y, z, t)$ – давление; $\vec{\mathcal{F}}$ — массовая сила.

Зависимость $p = p(\rho)$ предполагается известной.

В случае потенциального движения $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ – потенциал скорости, Л. Эйлером получен интеграл

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P + V = f(t),$$

где V – потенциал массовых сил; $P = \displaystyle\int \frac{dp}{\rho(p)}$; $f(t)$ – произвольная функция времени.

Ж. Лагранж на основе принципа возможных перемещений получил уравнения движения в переменных a, b, c, характеризующих положение частицы в некоторый момент $t = t_0$ [3]:

$$\left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2} - \vec{\mathcal{F}}\right)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial a} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial a} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2} - \vec{\mathcal{F}}\right)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial b} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial b} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2} - \vec{\mathcal{F}}\right)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial c} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial c} = 0,$$

$$\rho\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \rho(a, b, c, 0),$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t)$ – радиус-вектор частицы.

Ж. Лагранж отметил, что в переменных x, y, z уравнения имеют более простой вид и в случае потенциального движения баротропной жидкости повторил результат Л. Эйлера в части упомянутого интеграла.

Кроме того, в случае однородной несжимаемой жидкости он установил теорему:

Если $(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r})\big|_{t=0}$ *представляет собой полный дифференциал, то* $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = d\varphi$ *для любого* t.

Из этой теоремы следует, что если движение начинается из состояния покоя, то оно будет потенциальным. Если движение вызвано ударом по свободной поверхности, то, так как в момент удара скорость имеет потенциал, и в последующие моменты времени движение будет потенциальным.

Ж. Лагранж впервые сформулировал задачу о волнах на поверхности тяжелой несжимаемой однородной жидкости [3]. Для потенциального движения она определяется соотношениями

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0, \qquad -H(x,y,t)\le z\le\zeta(x,y,t),$$

$$p=p_0(x,y,t), \qquad \frac{dp}{dt}=\frac{dp_0}{dt}, \qquad z=\zeta,$$

$$H_t+H_x\varphi_x+H_y\varphi_y+\varphi_z=0, \qquad z=-H.$$

Здесь $H=H(x,y,t)$ – глубина; $\zeta=\zeta(x,y,t)$ – ордината свободной поверхности.

Давление p определяется из интеграла

$$\frac{p}{\rho}=-\varphi_t-\frac{v^2}{2}-gz+f(t),$$

где g – ускорение силы тяжести.

Здесь он отмечает, что нахождение функции φ, а также ζ, удовлетворяющих этим нелинейным уравнениям, не поддается “с помощью какого бы то ни было известного метода” [3].

В случае мелкой воды решение предлагается искать в виде

$$\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x,y,t)z^{i-1}.$$

Удовлетворяя условиям задачи, он приходит к квазилинейному уравнению для $\varphi_1=\varphi_1(x,y,t)$:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)=0,$$

$$\gamma=\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\varphi_{1x}^2+\varphi_{1y}^2\right)-gH-f(t).$$

Другой возможный путь упрощения задачи — рассматривать волны малой амплитуды. При этом движение будет потенциальным, а условия задачи примут вид:

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=0,$$

$$\varphi_{tt} + g\varphi_z = -\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial p_0}{\partial t} + f'(t), \qquad z = 0,$$

$$H_t + H_x\varphi_x + H_y\varphi_y + \varphi_z = 0, \qquad z = -H,$$

причем ордината свободной поверхности

$$\zeta = -\frac{1}{g}\ \varphi_t\ \Big|_{z=0} - \frac{p_0}{\rho g} + \frac{f(t)}{g}.$$

Для свободных волн, обусловленных начальным возмущением при $H = \infty$, $H = H_0$, эту задачу решили Коши (1815) и Пуассон (1816), [4]. Поставленная задача носит название задачи Коши-Пуассона [4]. Рассмотрим ее в плоском варианте:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0,$$

$$\varphi_{tt} + g\varphi_y = 0, \qquad y = 0,$$

$$\varphi = \varphi_x = \varphi_y = 0, \qquad y \to -\infty,$$

$$\rho\varphi(x,0) = f(x), \qquad \eta(x,0) = -\frac{1}{g}\ \varphi_t(x,0,0) = F(x).$$

При $F(x) = 0$ представляем

$$\varphi_1 = \int_0^\infty dk \int_{-\infty}^\infty A(\alpha)e^{ky}\cos\, k(x-\alpha)\cos\, \sqrt{gk}\ t\ d\alpha.$$

Записывая выражение для начального импульса в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk \int_{-\infty}^\infty f(\alpha)\cos\, k(x-\alpha)d\alpha$$

и сравнивая его со значением $\varphi_1(x,0,0)$, получаем

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi\rho}f(\alpha).$$

В случае $f(x) = 0$ исходим из выражения

$$\varphi_2 = \int_0^\infty dk \int_{-\infty}^\infty B(\alpha)e^{ky}\cos\, k(x-\alpha)\sin\, \sqrt{gk}\ t\ d\alpha$$

и, учитывая представление

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\cos\, k(x-\alpha)d\alpha,$$

получаем

$$B(\alpha) = -\frac{g}{\pi}\ \frac{F(\alpha)}{\sqrt{gk}}.$$

М.В. Остроградский, находясь во Франции в период 1822–1828, представил в Парижскую академию наук работу о распространении волн в цилиндрическом бассейне, которая была рекомендована О. Коши к печати и опубликована в Трудах академии в 1832 г. [5].

В этом случае к начальным условиям и условиям на поверхности жидкости добавляется условие непротекания дна бассейна и его стенок. Линейный вариант задачи имеет вид

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0,$$

$$\varphi_{tt} + g\varphi_z = 0, \quad z = 0; \qquad \varphi_z = 0, \quad z = -H; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \quad r = a;$$

$$\varphi = q(x,y), \quad \varphi = f(x,y), \quad z = 0, \quad t = 0.$$

Здесь a – радиус цилиндра; H – глубина жидкости; r, θ – полярные координаты.

Ищем частное решение в виде

$$\varphi = R(r)\Theta(\theta)Z(z)\cos(\omega t + \varepsilon).$$

Удовлетворяя уравнению Лапласа и граничным условиям задачи, получим

$$\omega^2 = gk\ \text{th}\ kH, \qquad \Theta = \cos(\nu\theta + \alpha), \qquad Z = \text{ch}\ k(z+H).$$

Для определения $R(r)$ имеем уравнение Бесселя

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)R = 0,$$

общее решение которого

$$R = R_\nu = A_\nu J_\nu(kr) + B_\nu Y_\nu(kr).$$

В случае кругового цилиндра $\nu = n$ – целое, $B_n = 0$. Условие непротекания стенок приводит к уравнению: $J'_n(ka) = 0$.

В случае круговой симметрии начального возмущения $q = q(r)$, $f = f(r)$ имеем

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \big(a_j \cos\,\omega_j t + b_j \sin\,\omega_j t\big) J_0\big(k_j r\big) \frac{\mathrm{ch}\ k_j(z+H)}{\mathrm{ch}\ k_j H},$$

где k_j являются положительными корнями уравнения $J'_0(k_j a) = 0$, $\omega_j^2 = g k_j \mathrm{th}\ k_j H$.

Удовлетворяя начальным данным и учитывая условие ортогональности $\int_0^a J_0(k_j r) J_0(k_\nu r) r\ dr = 0$, $j \neq \nu$, получим

$$a_j \cdot \int_0^a J_0^2(k_j r) r\ dr = \int_0^a q(r) J_0(k_j r) r\ dr,$$

$$\omega_j b_j \cdot \int_0^a J_0(k_j r) r\ dr = \int_0^a f(r) J_0(k_j r) r\ dr.$$

Волны открытого моря, зародившись под воздействием ветра, могут распространяться на большие расстояния. Достигая прибрежной зоны и проникая на акваторию порта, они оказывают силовое воздействие на корабли и причалы, а также на берега. Влияние дна проявляется в том, что волны не только меняют свою форму — трансформация, но и направление — рефракция.

Задача о распространении волн на поверхности жидкости переменной глубины за счет нелинейности условий на свободной поверхности и переменности коэффициентов в условии непротекания дна является сложной. Рассмотрим ее плоский линейный вариант в случае равномерно понижающегося дна [6, 4]. При этом дно представляет собой прямую $y = -x\mathrm{tg}\alpha$, $0 < \alpha \leq \pi$. Обозначим потенциал скорости через $\Phi = \Phi(x, y, t)$, тогда условие на дне запишется в виде $\Phi_x \sin\alpha + \Phi_y \cos\alpha = 0$, $y = -x\mathrm{tg}\alpha$.

Считая колебания периодическими по времени, положим $\Phi = \varphi(x, y)\cos(\omega t + \varepsilon)$, где ω – частота, ε – фаза. Тогда задача для $\varphi = \varphi(x, y)$ примет вид:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \qquad (x, y) \in D_0 = \big\{x, y:\ x > 0, -\mathrm{tg}\ \alpha < y < 0\big\},$$

$$\varphi_y - \nu\varphi = 0, \qquad x > 0, \qquad y = 0 \qquad \nu = \frac{\omega^2}{g};$$

$$\varphi_x \sin\alpha + \varphi_y \cos\alpha = 0, \qquad x > 0, \qquad y = -\text{tg}\,\alpha \cdot x.$$

Этой задаче можно придать комплексную форму, введя $z = x + iy = r\ e^{-i\theta}$, $r > 0$, $0 < \theta < \alpha$, $w = \varphi + i\psi$, $\varphi_x = \psi_y$, $\varphi_y = -\psi_x$.

Таким образом, требуется найти аналитическую функцию $w = w(z)$, $z \in D_0$, по условиям

$$Jm\left(\frac{dw}{dz} + i\nu w\right) = 0, \qquad z = x > 0,$$

$$Jm\left(e^{-i\alpha}\ \frac{dw}{dz}\right) = 0, \qquad z = r\ e^{-i\alpha},$$

имея в виду, что начало координат представляет собой особую точку, а при $z = \infty$ функция $w = w(z)$ ограничена.

Учитывая условие на дне, функция $F(z) = e^{-i\alpha}\dfrac{dw}{dz}$ может быть продолжена согласно принципу симметрии Римана–Шварца [7, 8] из области D_0 в область $D_1 = \{r, \theta :\ r > 0, \alpha < \theta < 2\alpha\}$:

$$F(z_1) = \overline{F(z)}, \tag{$*$}$$

где $z_1 \in D_1$ точка, симметричная с точкой $z \in D_0$ относительно прямой $\theta = \alpha$.

Если $z = x > 0$, то $z_1 = x\ e^{-2\alpha i}$, поэтому

$$w'\left(x\ e^{-2\alpha i}\right) = e^{2\alpha i}\overline{w'}(x),$$

$$w\left(x\ e^{-2\alpha i}\right) = \overline{w}(x).$$

Теперь из условия при $y = 0$ имеем

$$Jm\left\{e^{-2\alpha i} w'\left(x\ e^{-2\alpha i}\right) - i\nu w\left(x\ e^{-2\alpha i}\right)\right\} = 0,$$

что можно записать так

$$Jm\left\{e^{-2\alpha i}\ \frac{dw}{dz} - i\nu w\right\} = 0, \quad z = r\ e^{-2\alpha i}.$$

Таким образом, функция $w = w(z)$, $0 < \theta < 2\alpha$, является аналитической, ограничена при $z = \infty$ и имеет особую точку при $z = 0$.

Заметим, что функция

$$f_1 = f_1(z) = \sum_{k=0}^{s-1} b_k \frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{dw}{dz} + i\nu w\right), \quad J_m b_k = 0,$$

удовлетворяет условию $J_m f_1(z) = 0$, $z = x > 0$, а функция

$$f_2 = f_2(z) = \sum_{k=0}^{s-1} e^{-2\alpha k i} c_k \frac{d^k}{dz^k}\left(e^{-2\alpha i}\frac{dw}{dz} - i\nu w\right), \quad J_m c_k = 0,$$

принимает вещественные значения на прямой $y = -\mathrm{tg}2\alpha \cdot x$.

Коэффициенты b_k, c_k, $k = 0, 1, \ldots, (s-1)$ подбираются из условия $f_1(z) = f_2(z)$, $z \in D$, $D = D_0 \bigcup D_1$. Они имеют значения

$$c_0 = -b_0, \;\; c_k = -b_k, \;\; b_k = \frac{b_0}{\nu^k}\prod_{n=1}^{k} \mathrm{ctg}\; n\alpha, \;\; k = 1, 2, \ldots, (s-1).$$

Кроме того, необходимо удовлетворить условию

$$e^{-2s\alpha i} = -1, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}\;\frac{2n+1}{s}, \quad n - \;\; \text{целое}.$$

Таким образом, имеем представление

$$\alpha = \frac{np}{2q}, \qquad p - \text{нечетное}, \qquad p < 2q = 2s.$$

Отобразим конформно область $D = D_0 \bigcup D_1$ на нижнюю полуплоскость комплексного переменного ζ, полагая $\zeta = z^{\frac{q}{p}}$, причем функция $f_1(\zeta)$, $J_m\zeta < 0$, будет аналитической и $J_m f_1(\zeta) = 0$, $J_m\zeta = 0$. Продолжим ее в верхнюю полуплоскость $J_m\zeta > 0$:

$$f_1(\overline{\zeta}) = \overline{f_1(\zeta)}.$$

Таким образом, $f_1(\zeta)$ является аналитической во всей плоскости ζ с особой точкой в начале $\zeta = 0$.

В силу этого она представляется в виде ряда Лорана [7, 8]:

$$f_1(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n}, \qquad Jm\; a_n = 0.$$

Однако из равенств $(*)$ и $f_2(z_1) = f_1(z_1)$, $z_1 \in D_1$ следует, что $a_{2m} = 0$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Таким образом, для $w = w(z)$, $z \in D_0$, получаем уравнение

$$Lw = \sum_{k=0}^{q-1} b_k \frac{d^k}{dz^k} \left(\frac{dw}{dz} + i\nu w \right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{a_{2m+1}}{z^{(2m+1)q/p}}$$

с граничными условиями

$$Jm \left(\frac{dw}{dz} + i\nu w \right) = 0, \qquad z = x > 0,$$

$$Jm \left(e^{-\alpha i} \frac{dw}{dz} \right) = 0, \qquad z = r\ e^{-\alpha i}.$$

В силу линейности уравнения для w его решение можно представить в виде

$w = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} w_m$. Тогда $Lw_m = \dfrac{a_{2m+1}}{z^{(2m+1)q/p}}$.

Решение уравнения $Lw_m = 0$ ищем в виде $w_m = \sum\limits_{k=0}^{q-1} C_{mk} e^{\lambda_k z}$, где λ_k – корни характеристического уравнения, равные

$$\lambda_k = -i\nu\kappa^k, \qquad \kappa = \exp\left\{ -\frac{\pi p}{q} i \right\}.$$

С учетом граничных условий имеем

$$C_0 = C\ e^{-\frac{\pi}{4}(q-1)i}, \quad C_k = C\ e^{\frac{\pi}{4}i(2k-q+1)} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{ctg} j\alpha,$$

$$k = 1, 2, \ldots, (q-1); \quad J_m C = 0.$$

Кроме того, условие ограниченности решения вдали от берега требует, чтобы $p = 1$.

Частное решение неоднородного уравнения $Lw_m = \dfrac{1}{z^{(2m+1)q}}$ ищем методом Лагранжа вариации произвольных постоянных [4]. С учетом граничных условий оно имеет вид

$$w_m(z) = \frac{1}{2}\gamma \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(-1)^k}{\lambda_k \Lambda'(\lambda_k)} \Big[L_k(z) + L_{1k}(z) \Big],$$

где $L_k(z)$, $L_{1k}(z)$ есть значения интеграла

$$l_k(z) = e^{\lambda_k z} \cdot \int_{\infty}^{\lambda_k z} \frac{e^{-t}}{t^{(2m+1)q}} dt,$$

взятого вдоль пути с обходом точки $z = 0$ соответственно слева и справа. Также обозначено

$$\Lambda(\lambda) = \prod_{k=0}^{q-1} (\lambda - \lambda_k), \qquad \gamma = i^{(2m+3)q} \cdot \nu^{2(m+1)q-1}.$$

Решение задачи о трансформации волн над равномерно понижающимся дном имеет вид [4]:

$$W = \sum_{k=0}^{q-1} \Big\{ C_k e^{\lambda_k z} \cos(\omega t + \varepsilon_1) +$$

$$\frac{\gamma}{2} D \frac{(-1)^k}{\lambda_k \Lambda'(\lambda_k)} \big[L_k(z) + L_{1k}(z) \big] \cos(\omega t + \varepsilon_2) \Big\},$$

причем C_k зависят от действительной постоянной C, постоянная D также действительная.

Для ординаты поверхности вдали от берега имеем

$$\eta = -\frac{\omega C}{g} \cos\left[\nu x + \frac{\pi}{4}(q-1)\right] \sin(\omega t + \varepsilon) - \frac{\omega A}{g} \sin\left[\nu x + \frac{\pi}{4}(q-1)\right] \sin(\omega t - \varepsilon),$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

$$A = (-1)^{(m+1)q-1} \cdot \frac{\pi}{2^{q-1}} \frac{\nu^{(2m+1)q-1}}{[(2m+1)q-1]} \cdot \frac{D}{\prod_{k=1}^{q-1} \sin k\alpha}.$$

Если волна амплитуды a набегает на берег, тогда

$$A \cos \varepsilon + C \sin \varepsilon = 0, \qquad A \sin \varepsilon + C \cos \varepsilon = 0.$$

Отсюда $\mathrm{tg}\varepsilon = \pm 1$, $A \pm C = 0$, $A = \dfrac{q}{\omega} a$.

Вдали от берега соответственно имеем

$$\eta = \frac{\omega A}{g} \sin\left(\nu x + \omega t + \frac{\pi}{4} q\right), \qquad \varepsilon = \frac{\pi}{4},$$

$$\eta = \frac{\omega A}{g}\cos\left(\nu x + \omega t + \frac{\pi}{4}q\right), \qquad \varepsilon = -\frac{\pi}{4},$$

В заключение отметим, что волны конечной амплитуды рассматривали Стокс, Леви–Чивита, А.И. Некрасов, Я.И. Секерж-Зенькович. В этом случае профиль волны несимметричен относительно невозмущенного уровня свободной поверхности. Гребень уже, а впадина положе по сравнению с линейной формой волны, глубина впадины меньше, чем высота гребня. Траектория частицы при волновом движении жидкости представляет собой разомкнутую кривую [9]. Исследования по волнам на воде представляют собой блестящую иллюстрацию применения методов математического анализа, курс которого читал на факультете прикладной математики — процессов управления СПбГУ профессор Кирин Николай Ефимович.

Указатель литературы

1. *Алешков Ю.З.* Математическое моделирование физических процессов. СПб., 2001. 264 с.
2. *Эйлер Л.* Общие законы движения жидкостей. Изв. РАН, МЖГ. М., 1999. N 6. С. 26-54.
3. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. В 2-х т. Т.II. М.-Л., 1950. 440 с.
4. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М., 1977. 815 с.
5. *Остроградский М.В.* Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне. Избранные труды. Л., 1958. С. 156-170.
6. *Стокер Дж.Дж.* Волны на воде. М., 1959. 618 с.
7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 1958. 678 с.
8. *Алешков Ю.З.* Лекции по теории функций комплексного переменного. СПб., 1999. 196 с.
9. *Алешков Ю.З.* Течение и волны в океане. СПб., 1996. 225 с.

Г.В.Алферов

К ВОПРОСУ ОБ УПРАВЛЕНИИ РОБОТОМ

Разработка элементов искусственного интеллекта и организация их взаимодействия с целью выработки разумного поведения робота в заранее неизвестных и нестационарных условиях является главной проблемой создания робототехнических систем. Реализация этих функций возлагается на систему управления, которую в этом случае называют интеллектной [1,2].

Основной задачей интеллектной системы управления роботов является обеспечение перехода от получения сенсорной информации к формированию действий исполнительными органами. Роботы новых поколений должны осуществлять интеллектную связь восприятия с действием. Восприятие таких роботов отличается от простого очувствления способностью строить представления, лежащие в основе распознавания образов, рассуждений и целенаправленных действий. Интеллектное программное обеспечение отличается от обычного возможностями автоматизации логических рассуждений о пространственных отношениях, геометрических моделях объектов, характере роботизируемых процессов, работы в условиях неопределенности, самообучения и т. д.. В интеллектных системах используются следующие основные модели знаний. В основе первой модели лежит идея о том, что вся необходимая информация может быть описана как совокупность троек вида : $(a\,R\,b)$, где a и b два объекта или понятия, а R — двоичное отношение между ними. Такая модель графически представляется в виде сети, называемой семантической сетью, в которой вершинам соответствуют объекты или понятия, а дугам отношения между ними. При различных синтактических ограничениях на структуру семантической сети возникают различные типы представления. Например, клаузальные представления в логике, получившие широкое распространение в машинных методах логического вывода.

Другой моделью представления знаний являются фреймы [6]. Под фреймом первоначально понимали то его минимальное описание, которое содержит всю существенную информацию об этом объекте или явлении, и обладает тем свойством, что удаление из описания любой его части приводит к потере существенной информации, без которой описание объекта или явления не может быть достаточным для их идентификации. Однако, позже под фреймами стали понимать структуры вида: $\langle$ имя файла (множество слотов) $\rangle$. Допускается, чтобы слот сам был фреймом. Тогда в качестве значений слота выступает множество слотов. Другими возможностями для заполнения слотов могут быть константы, переменные, любые допустимые выражения в выбранной модели знаний, ссылки на другие слоты и фреймы и т д. Таким образом, фреймы представляют собой достаточно гибкую конструкцию, позволяющую отображать в памяти интеллектной системы разнообразные знания.

Другие распространенные модели знаний опираются на классическую логическую модель вывода. Это либо логические исчисления типа исчисления предикатов, либо системы продукций, т.е. правил вида: “Если А, то Б”, задающие элементарные шаги преобразований и умозаключений. Эти две модели знаний отличаются явно выраженной процедурной формой. Поэтому говорят, что они описывают процедурные знания, а модели знаний, опирающиеся на семантические сети — описывают декларативные знания. Оба вида знаний могут сосуществовать друг с другом. Например, в качестве значений некоторых слотов во фрейме могут выступать продукции. Однако перечисленные модели знаний еще не удовлетворяют требованиям работы со знанием о реальных объектах физического мира.

Обычные математические описания робототехнических систем (например, дифференциальные уравнения), предназначеные для численного моделирования, не столь адекватны в алгоритмизации качественных рассуждений.

По мере увеличения требований к применениям роботов возрастает необходимость в эффективных методах преодоления различных неопределенностей, использования избыточности, планирования действий. С этой целью предложены алгоритмы интеллектного поиска, согласования структур , рассуждений на основе выявления зависимостей, распространения ограничений в моделях.

В данной работе рассмотрим некоторые вопросы построения иерархической системы интеллектного управления. Структурно система состоит из трех взаимодействующих уровней: организационного (стратегического), координационного (тактического) и исполнительного (управленческого).

Организационный уровень является высшим уровнем, который осуществляет прием и интерпритацию команд ввода, имеет обратную связь с более низким уровнем. Этот уровень определяет представленные задачи на длительный период и порядок их выполнения.

Координационный уровень рассматривает конкретную информационную обработку задач и является необходимым для пересылки организованной информации следующему уровню.

Исполнительный уровень составлен из контроллеров, которые обеспечивают выполнение эффекторами последовательностей команд и управляют датчиками, обеспечивая обратную связь.

На организационном уровне различные операции определяются математическим способом и выбором вероятностной структуры для организации выполнения необходимых задач.

Предполагая, что рабочее пространство робота известно, рассмотрим следующие понятия [4].

— Набор команд $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, которые воспринимаются роботом как входные данные.

— Область задания робота включает n независимых событий. События
$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ являются отдельными элементарными действиями e_i, которые хранятся в памяти и представляют задания, которые должны быть выполнены.

— Действия A представляют собой группы событий, объединяемые для определения комплексной задачи. Например, $A_{234} = \{e_2, e_3, e_4\}$. Если события упорядочены, то мы имеем упорядоченное действие.

— Случайная переменная $x_i \in [0, 1]$ связана с каждым отдельным событием e_i. Если случайная переменная x_i двоична (либо 1, либо 0), то она указывает является ли событие активным или нет.

— Функции F являются внутренними операциями действий A.

(а) Машинное доказательство,связывающее прокомпилированную команду с действиями.

(б) Машинное планирование представляет собой упорядочивание действий. Упорядочение происходит с помощью матрицы, состоящей из нулей и единиц, которая определяет соответствующий порядок элементарных событий.

(в) Принятие решений является функцией выбора последовательности с наибольшей вероятностью успеха.

(г) Обратная связь представляет собой оценку функций и корректировку вероятностей, связанных с каждым элементарным событием и действием.

(д) Обмен в памяти есть информационный поиск и запоминание информации из запоминающего устройства, основанный на выборе данных обратной связи с низших уровней по мере выполнения комплексной задачи.

Каждая функция описывается как набор теоретических методов с вероятностями в качестве меры. Вероятность $p(c_j)$ соответствует каждой компилированной команде. Эта вероятность постоянно корректируется, но всегда

$$\sum_{j=1}^{m} p(c_j) = 1, \tag{1}$$

где $j = 1, 2, \ldots, m$ — число различных команд.

Априорные вероятности являются равными друг другу, то есть $p(c_j) = \frac{1}{m}$. Неопределенность, связанная с каждой командой, определяется в терминах функции энтропии

$$H(c_j) = -p(c_j) \cdot \log p_j \ , \tag{2}$$

тогда общая энтропия, связанная со всеми командами ввода, определяется в виде

$$H(C) = \sum_{j=1}^{n} H(c_j). \tag{3}$$

Кроме того, прохождение информации между двумя различными командами равно нулю, то есть

$$T(c_j{:}c_k) = 0, \qquad j \neq k. \tag{4}$$

После получения команды c_j процесс обработки информации связывает эту отдельную команду с 2^n различными элементарными действиями, которые хранятся в запоминающем устройстве. Каждое элементарное действие представляется в виде ряда двоичных случайных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, состоящих из 1 и 0, указывающих на присутствие или отсутствие отдельного события, и хранится в определенном порядке в памяти.Вероятность соотнесена каждому действию. Для того,чтобы вычислить общую вероятность каждого действия, необходимо знать отдельные вероятности событий. Пусть для любого $c_j \in C$ и любого $e_i \in E$ существует x_i такой, что

$$\left.\begin{array}{rcl} p(x_i = 0/c_j) & = & p_i^j \\ p(x_i = 1/c_j) & = & 1 - p_i^j \end{array}\right\}, \tag{5}$$

где p_i^j — вероятность того, что событие e_i является неактивным при получении команды c_j. Тогда общая вероятность действия равна

$$P(X_k/c_j) = P_k^j = p(x_1 = \sigma/c_j) \cdot p(x_2 = \sigma/c_j) \cdot \cdots \cdot p(x_n = \sigma/c_j), \tag{6}$$

где $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1;\ j = 1, 2, \ldots, m;$
$X_k = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_k$ — последовательность двоичных случайных переменных, а σ принимает значения 0 или 1. Эти вероятности образуют $2^n \times n$ числовую таблицу G_j, также хранящуюся в запоминающемся устройстве. Произведение элементов строки из G_j дает вероятность P_k^j. Вероятности p_i^j, $1 - p_i^j$ и P_k^j корректируются благодаря самообучающимся алгоритмам в процессе обратной связи. Энтропия, связанная с отдельным действием X_k есть

$$H(X_k/c_j) = -P_k^j \cdot \log P_k^j, \qquad \text{для} \quad \forall j, k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1. \tag{7}$$

А общая энтропия 2^n различных действий для одной команды определяется следующей формулой

$$H(X/c_j) = \sum_{k=0}^{2^n - 1} H(X_k/c_j), \qquad \text{для} \quad \forall j. \tag{8}$$

Кроме того, энтропия всех различных действий для всех команд равна

$$H_\Sigma = \sum_{j=1}^{m} H(X/c_j). \tag{9}$$

Далее на организационном уровне происходит планирование работ, которое включает операции над действиями. Это упорядочивание действий и подключение повторяющихся элементарных событий. Затем наступает этап принятия решения, т.е. выбора последовательности дейтвий с наибольшей вероятностью успеха. При этом энтропия используется для вычисления неопределенности действий и их упорядочивания. Полное упорядоченное действие с минимальной общей энтропией считается наиболее подходящим для выполнения работы и далее устанавливается связь с координационным уровнем, который является промежуточным с исполнительным уровнем.

Организация на исполнительном уровне воздействия робота на окружающие объекты связана с проблемами описания кинематики и динамики, управления, конструкций манипуляторов и схватов. Довольно хорошо разработаны методы расчета кинематики робототехнических систем, определяющие прямые и обратные преобразования из рабочего пространства в пространство значений шарнирных углов многозвенного манипулятора. Существуют алгоритмы вычисления якобиана для таких преобразований, исследованы случаи вырождения решений для разомкнутых кинематических цепей роботов различных конструкций.

Дифференциальные уравнения, описывающие динамику многозвенного робота в обобщенных координатах с учетом инерционных, центробежных и кориолисовых сил, в общем случае достаточно сложны:

$$A(q,\tau)\ddot{q} + B(q,\dot{q},\tau) = U(u) + V(t,q,\tau), \tag{10}$$

где $A(q,\tau)$ — квадратичная симметрическая положительно определенная матрица кинетической энергии T

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\,; \qquad A(q,\tau) = (a_{ij}(q,\tau)); \tag{11}$$

$B(q,\dot{q},\tau)$ — квадратичная n-мерная векторная форма обобщенных скоростей;

$U(u)$ — n-мерная вектор-функция обобщенных сил с известной зависимостью от управляющих воздействий u;

$u(t) \in R^n$ — вектор управления;

$\tau \in R^m$ — вектор постоянных неизвестных параметров;

$V(t,q,\tau)$ — ограниченная аддитивная помеха, не обладающая статистическими свойствами.

Для их упрощения предлагались подходы, основанные на отбрасывании, линеаризации и табулировании тех или иных членов, а также рекуррентные итеративные алгоритмы численных расчетов.

Проблемы управления роботами связаны со сложностью их динамики, зависимостью динамических и инерциальных свойств от текущей конфигурации руки, скачкообразным изменением параметров и структуры системы.

Опишем нижний уровень управления робототехнического модуля в реальном масштабе времени, который основан на развитии и поддержке базы знаний об управляемой системе. Для начала переопределим назначение регулятора. Функция регулятора заключается в получении требуемой отдачи от системы независимо от последствий внутренних или внешних изменений.

Нужная команда подается на регулятор, который использует содержащуюся в нем информацию об управляемой системе, внешних условиях и ответную информацию о текущем состоянии системы для определения управляющих сигналов, требуемых для получения желаемого отклика. При этом ответная информация используется двояко. Во-первых, она используется совместно с информацией, содержащейся в базе знаний, для расчета управляющих сигналов, которые обеспечивают получение желаемой реакции. Во-вторых, ответная информация о конкретной отдаче системы может быть приравнена к команде.

Любое несоответствие между ответной информацией и исходной командой показывает разницу между представлением системы на основе базы знаний и реальной системой. Это несоответствие может быть использовано в целях усовершенствования базы знаний, вследствие которого основанное на этой базе знаний представление задачи управления было бы максимально приближено к задаче управления для реальной системы.

Основная техническая сложность заключается в том, что идентификация процесса является функцией, не имеющей простого представления. Кроме того, если база знаний недостаточна для построения точной модели процесса, то возникают значительные расхождения между ожидаемым и реальным откликом системы.

Становится очевидным, что структура управления должна быть усовершенствована. Подход, который может быть предложен для усовершенствования структуры управления, заключается в присоединении простого пропорционального контура регулирования на выходе. При использовании этого подхода регулятор обратной связи включается всякий раз, когда возникает несоответствие между реальным выходом и командой. Если модель, содержащаяся внутри базы знаний, верна, то ошибки на выходе исключены и регулятор обратной связи не играет никакой роли.

Возможны несколько путей реализации регулятора на основе базы знаний. База знаний может принимать различные формы и создаваться разными путями. В любом случае база знаний должна включать факты и правила. Факты должны быть специфическими для окружающей среды. Функции объектов не обязательно должны быть частью базы знаний. В противоположность фактам большинство правил не является специфическими для окружающей среды.

Возможности любой системы с базой знаний исходят из ее механизма логического вывода. Это та компонента, которая дает системе с базой знаний ее разум. Поэтому важно из чего состоит механизм логического вывода и как он работает. Получив цель, механизм логического вывода будет пытаться найти решение. Система с базой знаний должна требовать согласованности между фактами и любыми результатами, кроме того, она должна помнить путь своего прогресса, формируя решение.

В случае построения модели регулятора простого робота, который способен компенсировать внешние нагрузки, а также показывать степень робастности в случае непредсказуемых внешних изменений база знаний оказывается не более чем дифференциальным уравнением второго порядка (10).

Решение уравнения (10) в реальном масштабе времени дает оценки выходного напряжения, необходимого для развития мотором такой мощности, чтобы могло быть осуществлено желаемое движение. Переменные $\ddot{q}$, $\dot{q}$ в уравнении (10) представляет собой не что иное, как ускорение и скорость требуемое в каждый момент времени. Значения $\ddot{q}, \dot{q}$ вычисляются программой-генератором команд, основанном на задаче движения подвижной части.

Главная трудность метода, основанного на базе знаний, это идентификация процесса. В процессе функционирования робота производится контроль внутреннего и внешнего состояния модуля и корректировка соответствующих данных в базе знаний. Во время этого процесса используется обратная связь на базе датчиков.

Внутреннее и внешнее состояние характеризуется рядом параметров, значения которых могут быть предсказаны на основе информации о выполняемой задаче, совокупность значений всех этих параметров полностью определяет задачу.

Основной проблемой является занесение в базу знаний значений указанных параметров перед началом выполнения задачи.

Ввод задания в систему производится путем указания типа задачи, которую необходимо выполнить. При получении задания система обращается за недостающей информацией к базе знаний и формирует алгоритм функционирования робототехнического модуля. Таким образом описанный метод имеет ряд преимуществ перед классическими методами управления.

Указатель литературы

1. *Тимофеев А.В.* Роботы и искусственный интеллект. М., Наука, 1978. 192 с.
2. *Тимофеев А.В.* Управление роботами. Л., ЛГУ. 1986. 240 с.
3. *Brady M.* Artificial intelligence and robotics // Artificial Intelligence, 1985. v.26, №1. P. 79-121.
4. *Saridis G.N., Valavanis K.P.* Mathematical formulation of the organization level of an intelligent machine // Proc. IEEE, Int. Conf. Rob. and Autom., San Francisco, Calif., Apr. 7–10, 1986. v. 1. 1986. P. 267-272.

5. *Kirschbrown R.H., Darf R.C.* 'KARMA'— A knowledge-Based Robot Manipulation system: determining problem characteristics // Robots 8 Conf. Proc. Detrait. Mich., June 4–7, 1984, v. 2. Dearborn, Mich., 1984. 20/36–20/46.

6. *Минский М.* Фреймы для представления знаний. М., Энергия, 1979. 151 с.

Е.В. Голицын, М.И. Летавин

О СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ НАГРЕВА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ТЕПЛОВЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

"Не важно, что просто -
было бы полезно."
Н.Е. Кирин

Квазистационарное температурное поле $T(r, \varphi)$ в сечении вращающегося с постоянной угловой скоростью ω цилиндра радиуса R описывается в неподвижной полярной системе координат (r', φ) уравнением [1, 2]

$$L_\varepsilon T \equiv c\frac{\partial T}{\partial \varphi} - \varepsilon^2 \mathrm{div}(\lambda\, \mathrm{grad\, T}) = 0, \quad (\mathrm{r}, \varphi) \in \Omega, \tag{1}$$

где $\Omega = \{(r, \varphi): \; 0 < r < 1, \; 0 \le \varphi < 2\pi\}, \; r = r'/R$ - приведенная безразмерная переменная, $\varepsilon^2 = (Pd)^{-1}$, $Pd = R^2\omega c'/\lambda'$ - критерий Предводителева, $\lambda', \; c'$ - характерные значения коэффициентов теплопроводности и массовой теплоемкости соответственно, $\lambda = \tilde{\lambda}/\lambda'$, $c = \tilde{c}/c'$ - приведенные безразмерные коэффициенты теплопроводности и массовой теплоемкости, $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{c}$ - коэффициенты теплопроводности и массовой теплоемкости. Граничные условия моделируют конвективный и радиационный теплообмен с внешней средой:

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial r} + \alpha(T - T_c) + \sigma(\beta(T) - \beta(T_r)) = 0, \quad r = 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \tag{2}$$

где $\alpha = \tilde{\alpha}R/\lambda'$ - критерий Био конвективного теплообмена поверхности цилиндра с внешней средой, $\tilde{\alpha}$ - коэффициент конвективного теплообмена, $\sigma = \tilde{\sigma}R/\lambda'$, $\tilde{\sigma}$ - коэффициент лучистого теплообмена, T_c, T_r - температуры сред, с которыми происходит конвективный и лучистый теплообмен соответственно, $\beta(T) = |T|^3 T$.

Критерий Предводителева Pd в реальных условиях работы валков и роликов металлургического оборудования меняется в пределах от десятков до сотен тысяч [1, 2], поэтому в уравнении (1) коэффициент ε является малым параметром.

Асимптотическое разложение решения уравнения (1) при c и λ, не зависящих от искомой функции T, при граничных условиях Дирихле построено в [3, 4]. К задаче теплопроводности во вращающемся цилиндре впервые* метод сингулярных возмущений применен в [5, 6] в случае $\lambda = c \equiv 1$ в Ω. Полученные асимптотические представления решения применялись для расчета температуры в [7, 8], напряжений в [9] и оптимизации в [10, 11].

В настоящей работе рассматривается случай зависимости функций $c,\ \lambda,\ \alpha,\ \sigma$ от температуры T.

В первом параграфе строится асимптотическое разложение решения, во втором подробно выписывается первое приближение для температуры. В третьем параграфе рассматривается задача оптимизации температуры.

§1. Построение асимптотического разложения

Перепишем задачу (1), (2) относительно функции $\theta(r,\varphi) = X[T(r,\varphi)]$, $X(T) = \int\limits_0^T \lambda(\tau)\,d\tau$:

$$L_\varepsilon\theta \equiv \frac{\partial e(\theta)}{\partial\varphi} - \varepsilon^2 \triangle_{r,\varphi}\,\theta = 0, \quad (r,\,\varphi)\in\Omega, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} + f(\varphi,\theta) = 0, \quad r = 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \tag{4}$$

где $e(\theta) = \int\limits_0^{X^{-1}(\theta)} c(\tau)\,d\tau$, $\triangle_{r,\varphi} = \frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}]$ - оператор Лапласа в полярных координатах,

$$f(\varphi,\theta) = \alpha(\varphi, X^{-1}(\theta))\cdot\{X^{-1}(\theta) - X^{-1}(\theta_c)\}+$$
$$+\sigma(\varphi, X^{-1}(\theta))\cdot\{\beta(X^{-1}(\theta)) - \beta(X^{-1}(\theta_r))\}, \tag{5}$$

где $\theta_c(\varphi) = X(T_c(\varphi))$, $\theta_r(\varphi) = X(T_r(\varphi))$.

---

*). Это разложение впервые докладывалось одним из авторов на семинаре Н.Е. Кирина в 1988 году.

Присоединим к задаче (3), (4) условия периодичности и непрерывности:

$$\theta(r,2\pi)=\theta(r,0),\quad 0<r<1,$$

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial\theta(r,\varphi)}{\partial r}=0,\quad 0\le\varphi<2\pi. \qquad (6)$$

Будем искать решение задачи (3), (4), (6) в виде суммы

$$\theta_\varepsilon(r,\varphi)=U+V, \qquad (7)$$

где $U=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n u_n(r,\varphi)$, $V=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\nu_n(\eta,\varphi)$ - регулярная и погранслойная части разложения, $\eta=(1-r)/\varepsilon$. Функции $\nu_n(\eta,\varphi)$ считаем экспоненциально убывающими:

$$|\nu_n|\le C_1e^{-C_2\eta},\quad \eta>0. \qquad (8)$$

Подставляя формальные ряды в (3), (4), (6), получаем аналогично работе [9], что $u_n\equiv const$, $n=0,1,...,$ $\nu_0\equiv 0$. Также получаем системы для определения $u_n,\ \nu_n(\eta,\varphi)$:

$$\langle\Psi_n(\varphi)\rangle=0, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial\nu_n(\eta,\varphi)}{\partial\varphi}-a^2\frac{\partial^2\nu_n(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2}=\Phi_n(\eta,\varphi),\ \eta>0,\ 0\le\varphi<2\pi, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial\nu_n(0,\varphi)}{\partial\eta}=\Psi(\varphi),\quad 0\le\varphi<2\pi, \qquad (11)$$

где $\langle\cdot\rangle$ - усреднение по аргументу φ,

$$\Phi_n(\eta,\varphi)=a^2\cdot\left\{-\sum_{k=2}^{n}e^{(k)}(u_0)\frac{\partial\prod_n^k(\alpha)}{\partial\varphi}-\sum_{k=1}^{n-1}\eta^{n-k-1}\frac{\partial\nu_k}{\partial\eta}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1)\eta^{n-k-2}\frac{\partial^2\nu_k}{\partial\varphi^2}\right\}, \qquad (12)$$

$a^2=[e'(u_0)]^{-1},\ \alpha_n(\eta,\varphi)=u_n+\nu_n(\eta,\varphi)$, $\prod_n^k(\alpha)=\prod_n^k(\alpha_1,\ ...,\ \alpha_n)$ - многочлен степени k, например, $\prod_n^0=0$, $\prod_n^1=\alpha_n$, $\prod_n^n=\frac{1}{n!}\alpha_1^n$, $\prod_3^2=\alpha_1\alpha_2$, $\prod_4^2=\frac{1}{2}\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_3$, причем, от функции α_n зависит лишь $\prod_n^1$,

$$\Psi_n(\varphi)=f_{n-1}(0,\varphi),\ f_0(\eta,\varphi)=f(\varphi,u_0),$$

$$f_n(\eta,\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^k f(\varphi,u_0)}{\partial\theta^k} \prod_n^k(\alpha), \quad n = 1, 2, \ \dots \,. \tag{13}$$

Во всех формулах сумма считается равной нулю, если нижний индекс больше верхнего. Постоянная u_0 однозначно находится из уравнения (9) при n=1, если функция $\langle f(\varphi,\theta)\rangle$ строго монотонна по θ и при некотором значении θ $\langle f(\varphi,\theta)\rangle \le 0$. В дальнейшем будем предполагать, что

$$\exists\, \theta \ge 0 : \ \langle f(\varphi,\theta)\rangle \le 0 \ \text{ и } \ \left\langle \frac{\partial f(\varphi,\theta)}{\partial\theta} \right\rangle \ge \bar f > 0, \ T \in \mathbf{R}. \tag{14}$$

Для функции $f(\varphi,\theta)$, определенной по формуле (5), эти условия будут выполнены, если функции α и σ не зависят от T, измеримы, неотрицательны

$$\alpha(\varphi), \quad \sigma(\varphi) \ge 0 \tag{15}$$

и удовлетворяют условию

$$\langle\alpha(\varphi)\rangle + \langle\sigma(\varphi)\rangle > 0, \tag{16}$$

а функция $\lambda(T)$ удовлетворяет условию

$$0 < \lambda_0 \le \lambda(T) \le \lambda_1, \quad T \in \mathbf{R}. \tag{17}$$

В качестве $\underline{\theta}$ в (14) можно взять

$$\underline{\theta} = \min\{vrai\ \inf\theta_c(\varphi), vrai\ \inf\theta_r(\varphi)\}.$$

Функция $\nu_1(\eta,\varphi)$ находится из (10), (11) при n=1 ($\Phi_1 \equiv 0$). Так как для функции $\Psi_1(\varphi)$ из граничного условия (11) среднее значение, согласно (9), равно нулю, то решение $\nu_1(\eta,\varphi)$ удовлетворяет условию экспоненциального убывания (8) [4, 9].

Из условия (9) при n=2, учитывая (13), находим

$$u_1 = -\left\langle \frac{\partial f(\varphi,u_0)}{\partial\theta}\nu_1(0,\varphi) \right\rangle \Big/ \left\langle \frac{\partial f(\varphi,u_0)}{\partial\theta} \right\rangle. \tag{18}$$

Затем находим $\nu_2(\eta,\varphi)$ из (10), (11). Причем, в силу специального вида правой части $\Phi_n(\eta,\varphi)$ уравнения (10), легко вывести, что $\langle\Phi_n(\eta,\varphi)\rangle = 0$ и $\Phi_n(\eta,\varphi)$ удовлетворяет оценке типа (8). Тогда удовлетворяет оценке (8) и функция $\nu_2(\eta,\varphi)$ [4, 9].

Построение прочих членов разложения u_n, $\nu_n(\eta,\varphi)$ для $n \geq 3$ происходит аналогично.

Пусть $\psi(r) \in C^\infty([0,1]):\ 0 \leq \psi(r) \leq 1,\ \psi(r) = 0\ \forall r \in [0,1/3]$, $\psi(r) = 1\ \forall r \in [2/3, 1]$. Обозначим $U_N = \sum\limits_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k,\ V_N(\eta,\varphi) = $ $= \sum\limits_{k=0}^{N} \varepsilon^k \nu_k(\eta,\varphi)$. Приближенное асимптотическое решение задачи (3), (4) определим формулой

$$\theta_N = U_N + \psi(r) V_N, \tag{19}$$

а погрешность приближения формулой

$$z_{\varepsilon,N} = \theta - \theta_N. \tag{20}$$

Рассуждения, обосновывающие асимптотическое представление (20), аналогичны работе [12], поэтому сформулируем только результат. В следующей теореме N - целое число ($N \geq 1$), $W_2^1(\Omega)$ и $C^\lambda(\bar{\Omega})$ пространства Соболева и Гельдера [13] с нормами соответственно $\| \bullet \|^{(\lambda)}$, $\| \bullet \|_{2,1}$.

Теорема 1. *Пусть функция* $e(\theta)$ *в уравнении* (3) *определена при* $\theta \geq 0$, *строго возрастает и непрерывна вместе с производными до порядка* N; *функция* $f(\varphi,\theta)$ *в уравнении* (4) *определена при* $\theta \geq 0$, 2π *периодична по* φ, *сама функция и ее производные по аргументу* θ *до порядка* N-1 *непрерывны при фиксированном* φ *и имеют ограниченные одним числом* V *вариации равномерно по* θ, $f(\varphi,\theta)$ *удовлетворяет условиям* (14) *и строго монотонна по* θ *при фиксированном* φ.

Тогда найдутся такие числа $\varepsilon_0 > 0$, $\lambda \in (0,1)$, $C > 0$, *что* $\theta,\ \theta_N \in W_2^1(\Omega) \bigcap C^\lambda(\bar{\Omega})$ *и справедливы оценки* $\|z_{\varepsilon,N}\|^{(\lambda)} \leq C\varepsilon^{N+1}$, $\|z_{\varepsilon,N}\|_{2,1} \leq C\varepsilon^{N+1/2},\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$.

§2. Анализ температуры

Из теоремы 1 можно вычислить асимптотические приближения для температуры. Для первого приближения результат выглядит так.

Теорема 2. *Пусть функции* $c(T)$, $\lambda(T)$ *в уравнении* (1) *определены и непрерывны при* $T \geq 0$ *и удовлетворяют оценкам типа*

(17). *Функции* $\alpha(\varphi)$, $\sigma(\varphi)$, $T_c(\varphi)$, $T_r(\varphi)$, *в уравнении* (2) 2π - *периодические, неотрицательные, ограниченной вариации и выполнено условие* (16).

Тогда справедливо представление

$$T(r,\varphi) = T_0 + \varepsilon(T_1 + \psi(r)\tau(\eta,\varphi)) + z_\varepsilon, \tag{21}$$

где $T_0,\ \tau(\eta,\varphi),\ T_1$ - *решения уравнений*

$$\langle\alpha\rangle T_0 + \langle\sigma\rangle\beta(T_0) = \langle\alpha T_c + \sigma\beta(T_r)\rangle, \tag{22}$$

$$\frac{\partial\tau(\eta,\varphi)}{\partial\varphi} - a^2\frac{\partial^2\tau(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2} = 0, \tag{23}$$

$$\eta > 0,\quad 0 \le \varphi < 2\pi,\quad a^2 = \lambda(T_0)/c(T_0),$$

$$\frac{\partial\tau(0,\varphi)}{\partial\eta} = \zeta(\varphi) \equiv \frac{1}{\lambda(T_0)}\{\alpha(\varphi)(T_0 - T_c(\varphi)) + \sigma(\varphi)(\beta(T_0) - \beta(T_r(\varphi)))\}, \tag{24}$$

$$0 \le \varphi < 2\pi,$$

$$T_1 = -\langle(\alpha(\varphi) + \sigma(\varphi)\beta'(T_0))\tau(0,\varphi)\rangle/\langle\alpha(\varphi) + \sigma(\varphi)\beta'(T_0)\rangle, \tag{25}$$

а для погрешности $z_\varepsilon(r,\varphi)$ *справедливы оценки*

$$\|z_{\varepsilon,N}\|^{(\lambda)} \le C\varepsilon^2,\quad \|z_{\varepsilon,N}\|_{2,1} \le C\varepsilon^{3/2},\quad \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]. \tag{26}$$

где константы $\varepsilon_0 > 0$, $\lambda \in (0,1)$, $C > 0$, *зависят только от констант неравенств* (17) *и вариации функций* $\alpha(\varphi)$, $\sigma(\varphi)$, $T_c(\varphi)$, $T_r(\varphi)$.

З а м е ч а н и е. Если тепловые характеристики $\tilde\lambda,\ \tilde c$ не зависят от температуры (случай линейного уравнения теплопередачи), то безразмерные коэффициенты $\lambda = c = 1$ и уравнения (22) - (24) переходят в уравнения для определения первого приближения из работы [7].

Для среднеинтегральной температуры в сечении цилиндра из формулы (21) и оценки (26) получим выражение

$$\bar T = (\pi r^2)^{-1}\iint\limits_{\substack{0\le\varphi\le2\pi\\0<r<1}} T(r,\varphi)\,drd\varphi = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2, \tag{27}$$

где $|T_2| \le C,\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$.

§3. Минимизация среднеинтегральной температуры

Применение асимптотического представления решения к оптимизации теплового режима рассмотрим на примере минимизации среднеинтегральной температуры (27) при помощи граничных условий задачи (1), (2).

Введем класс управлений W, связанный с граничным условием (2). Пусть [14] L_∞ - банахово пространство существенно ограниченных 2π - периодических функций $f(\varphi)$ с обычной нормой $\|f\|_\infty = = vrai \sup\limits_{\varphi\in[0,2\pi]} \|f(\varphi)\|$, L_∞^n - декартово произведение n сомножителей L_∞. Тогда

$$W = \{w : \ w \in L_\infty^4, \ \underline{w}(\varphi) \le w(\varphi) \le \overline{w}(\varphi), \ \ \varphi \in [0, 2\pi]\}, \qquad (28)$$

где $\underline{w}(\varphi) = (\underline{w}_1(\varphi), ..., \underline{w}_4(\varphi))$, $\overline{w}(\varphi) = (\overline{w}_1(\varphi), ..., \overline{w}_4(\varphi))$; $0 \le \underline{w}_i(\varphi) \le \overline{w}_i(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $i = 1, ..., 4$; $\langle \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \rangle > 0$; функции $\underline{w}_i, \overline{w}_i$ - кусочно непрерывные и 2π - периодические. В условиях (28) мы подразумеваем $w_1 = \alpha$, $w_2 = \sigma$, $w_3 = T_c$, $w_4 = T_r$ в обозначениях уравнения (2). Поэтому условие $\langle \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \rangle > 0$ означает, что исключаются случаи полной теплоизоляции. Класс управлений (28) гарантирует в рассматриваемой задаче существование минимизирующего управления и выполнение для него принципа минимума Понтрягина [12], однако уравнение для сопряженной функции не позволяет извлекать информацию о качественных ее свойствах типа знакоопределенности, аналитичности и т.д. В то же время для приближенной задачи управления получается характеристика экстремалей и метод их вычисления.

Из представления (27) в нулевом приближении мы получаем задачу оптимизации

$$J(w) = T_0 \to \inf \ w \in W, \ \ \langle w_1 J + w_2 \beta(J) \rangle = \langle w_1 w_3 + w_2 \beta(w_4) \rangle, \ (29)$$

для которой необходимые условия минимума будут иметь вид [15]

$$H(w^0(\varphi)) = \max\{H(w) : \underline{w}(\varphi) \le w \le \overline{w}(\varphi);$$

$$H(w) = w_1 J^0 + w_2 \beta(J^0) - w_1 w_3 + w_2 \beta(w_4) \qquad (30)$$

при почти всех $\varphi \in [0, 2\pi]$, где J^0, w^0 - соответственно минимальное значение функционала и оптимальное управление в (29). Из представления функции $H(w)$ в виде

$$H(w) = w_1(J^0 - w_3) + w_2(\beta(J^0) - \beta(w_4))$$

и неотрицательности w_1, w_2 следует, что $w_3^0(\varphi) = \underline{w}_3(\varphi)$, $w_4^0(\varphi) = \underline{w}_4(\varphi)$. Так что эти компоненты управляющей вектор - функции определены однозначно. Мы обозначим их $T_c(\varphi)$, $T_r(\varphi)$ и будем считать фиксированными в дальнейшем. В формулах (28)-(30) множество допустимых управлений W будет состоять из вектор - функций $w(\varphi) = (w_1(\varphi), w_2(\varphi))$. Теперь необходимое условие (30) требует выбирать конвективный теплообмен максимальным там, где температура охлаждения $T_c(\varphi)$ ниже J^0, и минимальным там, где эта температура выше J^0. Аналогично дело обстоит и с радиационным теплообменом.

Формализация этого естественного условия позволяет дать простую вычислительную процедуру для определения оптимального управления [12].

Авторы благодарны участникам семинара по моделированию технологических и социально - экономических процессов ЧФ УРАО за обсуждение работы.

Указатель литературы

1. *Шичков А.Н.* Температурный режим листопрокатных валков. Л., ЛГУ. 1974. 187 с.

2. *Полухин В.П., Хлопонин В.Н., Смитов Е.В. и др.* Алгоритмы расчета основных параметров прокатных станов. М., Металлургия. 1975. 231 с.

3. *Хасьминский Р.З.* О некоторых дифференциальных уравнениях, встречающихся при исследовании колебаний с малыми случайными возмущениями // ДАН. 1962. Т. 142. №3 С. 560-563.

4. *Хасьминский Р.З.* О диффузионных процессах с малым параметром // Известия АН. 1963. Т. 27. С. 1281-1300.

5. *Летавин М.И.* О пограничном слое в задаче нагрева во вращающемся цилиндре // Дифференц. ур-ния с частными производными: Межвузовский сборник научных трудов. Л., ЛГПИ. 1989. С. 58-66.

6. *Летавин М.И.* Асимптотическое разложение решения краевой задачи теплопроводности для вращающегося цилиндра // Дифференц. ур-ния. 1990. Т. 26. №12. С. 2088-2093.

7. *Запенкова Г.И., Летавин М.И., Шестаков Н.И.* Температурное поле вращающегося цилиндра // ИФЖ. 1990. Т. 59. №1. С. 169-170.

8. *Егоров В.П., Летавин М.И., Шестаков Н.Н.* Температурное поле вращающегося цилиндра // ИФЖ. 1991. Т. 61. №4. С. 691-699.

9. *Летавин М.И., Шестаков Н.И.* Решение уравнений термоупругости в сечении вращающегося цилиндра методом сингулярных возмущений // ПММ. 1993. Т. 57. №2. С. 149-157.

10. *Летавин М.И.* О сингулярной задаче управления температурой вращающегося цилиндра // Дифференц. ур-ния. 1995. Т. 31. №2.

11. *Бутузов В.Ф., Уразгильдина Т.А.* Об одной сингулярно возмущенной системе уравнений эллиптического типа в критическом случае // Дифференц. ур-ния. 1986. Т. 22. №9. С. 1565-1576.

12. *Летавин М.И.* О сингулярной задаче управления температурой вращающегося цилиндра в квазистационарном режиме II // Деп. в ВИНИТИ. 09.02.89. №895-В89. 38 с.

13. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М., Наука. 1971.
14. *Жук В.В.* Структурные свойства функций и точность аппроксимации: Учебное пособие. Л., 1984.
15. *Кирин Н.Е.* Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. Л., 1975. 160 с.

В.Ф. Горьковой

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕЗ НОРМЫ

Чтобы вычислить производную вещественной функции $f : R \to R$ в точке $x_0 \in R$, мы должны поместить начало координат в точку $(x_0, f(x_0)) \in R^2$. Координата точки x относительно нового начала отсчета x_0 имеет вид $x - x_0$, где x координата точки x относительно нуля. Аналогичный вид $f(x) - f(x_0)$ имеет координата точки $f(x)$ относительно $f(x_0)$. В результате такого переноса начала отсчета функция $f(x)$ превратится в функцию $\varphi(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$.

Если в R задать равномерную структуру [1, с. 201] $\mathcal{N}$ с помощью окружений

$$V_\alpha = \{(x, y) \in R^2 : |y - x| \leq \alpha\}, \tag{1}$$

то точка $(x, y) \in V_\alpha$ по отношению к точке (x, x) будет играть такую же роль, что и $(y - x)$ по отношению к нулю в R. То же можно сказать и в отношении $(f(x), f(y))$.

Для каждой, по крайней мере ограниченной на интервале $[x_0, x]$ функции $f : R \to R$, можно определить линейную на $[x_0, x]$ функцию $l_{(x_0,x)}$, состоящую в умножении аргумента на число $l_{(x_0,x)} \in R$, такое, что

$$l_{(x_0,x)}(x - x_0) = f(x) - f(x_0).$$

Например, если $y = x^3$, то $l_{(0,1)}(x) = x$ на интервале [0,1], $l_{(0,2)}(x) = 4x$ на интервале [0,2], $l_{(0,3)}(x) = 9x$ на интервале [0,3] и т.д.

Множество линейных функций $\{l_{(x_0,x)}\}_{x \in R}$ будем называть линейным представлением, или просто представлением, функции $f : R \to R$ относительно x_0.

Очевидно, если $x - x_0 \neq 0$, то $l_{(x_0,x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, и предел, если он существует, $l_{(x_0,x)}$, при $x \to x_0$ есть производная функции $f : R \to R$ в точке x_0.

Функция $l_{(x_0,x)}$ не зависит от значений x и x_0, а зависит только от их разности. На плоскости $R \times R$ множеству пар (x_0, x), обладающих одной и той же разностью $x - x_0$ соответствует прямая, параллельная диагонали $\triangle R$ в $R \times R$. Если $x - x_0 > 0$, то прямая расположена выше диагонали, в противном случае – ниже.

Числу $l_{(x_0,x)}$ на плоскости R^2 соответствует отображение $L_{(x_0,x)}$, преобразующее прямые, параллельные $\triangle R$ и отстоящие от нее на величину $x - x_0$, в аналогичные прямые, отстоящие от $\triangle R$ на величину $f(x) - f(x_0)$.

Если окрестности диагонали $\triangle R$ определить с помощью соотношения (1), то положим $V_\alpha = V_\alpha^+$, если $y - x \geq 0$ и $V_\alpha = V_\alpha^-$, если $y - x \leq 0$. Множество этих окрестностей, называемых окружениями, определяют на R равномерную структуру $\mathcal{N}$ [1, с. 201].

Обозначим через $V_{(x,y)}$ окружение из $\mathcal{N}$, являющееся пересечением всех окружений, содержащих точку $(x, y) \in R^2$. Очевидно, $V_{(x,y)} = V^0_{(x,y)}$, где $V^0_{(x,y)} = V^+_{(x,y)} \vee V^-_{(x,y)}$.

Функции $l_{(x,y)}$ на плоскости R^2 соответствует отображение $L_{(x,y)} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ такое, что

$$L_{(x,y)}(V_{(x,y)}) = V_{(f(x),f(y))}$$

Пусть $L_{(x_0,x)} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ такое, что

$$L_{(x_0,x)}(V_{(x_0,x)}) = V_{(f(x_0),f(x))}.$$

Тогда производную функции $f : R \to R$ в точке x_0 можно определить как предел, если он существует, $L_{(x_0,x)}$, при $x \to x_0$, где $L_{(x_0,y)}$ определяется из равенства

$$L_{(x_0,x)}(V_{(x_0,x)}) = V_{(f(x_0),f(x))}.$$

Пусть теперь X и Y равномерные топологические пространства [1, с. 201], $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ их равномерные структуры и $f : X \to Y$.

О п р е д е л е н и е 1. Представлением функции $f : X \to Y$ относительно точки x_0 называется множество функций $\{L_{(x_0,x)}\}_{x \in X}$ таких, что

$$L_{(x_0,x)}(V_{(x_0,x)}) = W_{(f(x_0),f(x))}.$$

Здесь $V_{(x_0,x)}, W_{(f(x_0),f(x))}$ пересечения всех окружений из $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$, содержащих соответственно точки (x_0, x) и $(f(x_0), f(x))$.

О п р е д е л е н и е 2. Значением производной функции $f : X \to Y$ в точке x_0 называется отображение $L_{x_0} : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, являющееся пределом $L_{(x_0,x)}$, если он существует, при $x \to x_0$.

Производной функции $f : X \to Y$ в точке x_0 называется отображение $f' : X \to \mathcal{P}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$, такое, что $f'(x_0) = L_{x_0}$.

Здесь $\mathcal{P}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$- множество отображений из $\mathcal{N}$ в $\mathcal{M}$.

По теореме Лагранжа о среднем $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ для некоторого $c \in (a, b)$.

Если $l_{(a,b)}$ такое число, что $l_{(a,b)}(b - a) = f(b) - f(a)$, то существует последовательность $b_i - a_i$, такая, что для всех $i = 1, 2, ...$, $[a_{i+1}, b_{i+1}] \subseteq [a_i, b_i] \subseteq [a, b]$, и $l_{(a,b)}(b_i - a_i) = f(b_i) - f(a_i)$. Если f дифференцируема на $[a, b]$, то существует $c_i \in (a, b)$, такое, что $l_{(a,b)} = f'(c)$, при $a_i, b_i \to c$.

Значению $f'(c)$ в $R \times R$ отвечает отображение $L_c : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, являющееся значением производной функции f в точке c, такое, что

$$L_c(V_{(a,b)}) = V_{(f(a),f(b))}.$$

Пусть $f : X \to Y$ дифференцируемая в каждой точке из $X' \subseteq X$ функция. И пусть $\{L_{(x_0,x)}\}_{x \in X}$ представление функции f относительно $x_0 \in X'$, а $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ равномерные структуры на X и Y соответственно.

Представим каждое $V \in \mathcal{N}$ в виде объединения V^+ и V^-, которые определяются следующим образом.

1.$V = V^+ \cup V^-, V \in \mathcal{N}$

2.$V^+ \cap V^- = \triangle X$

Если положить $V^0 = V^+ \vee V^-$, то

3.$V^0 \cup \widetilde{V^0} = \overline{V^0}$

4.$V^0 \cap \widetilde{V^0} = \widehat{V^0}$.

Здесь $V^0, \widetilde{V^0}, \overline{V^0}, \widehat{V^0}$ не обязательно различные.

Множество $\{\triangle X, V^0 \in \mathcal{N}\}$ есть базис фильтра окружений из X^2[1, .81].

Через $V_{(a,X')}$ обозначим окружение из $\mathcal{N}$, равное пересечению всех окружений из $\mathcal{N}$, содержащих $\{a\} \times X'$ для такого $a \in X'$, что $V_{(a,X')} = V^0$.

Тогда теорема о среднем будет иметь вид

$$L_c(V_{(a,b)}) = W_{(f(a),f(b))}$$

для любых $b \in X'$ и некотором $c \in X'$. Здесь L_c — значение производной функции $f : X \to Y$ в точке c.

Действительно, пусть $L_{(a,b)}$ такое отображение из $\mathcal{N}$ в $\mathcal{M}$, что $L_{(a,b)}(V_{(a,b)}) = W_{(f(a),f(b))}$.

Если существуют $\alpha_i, \beta_i \in X', i = 1, 2, ...$, такие, что $V_{(a,b)} \supseteq V_{(\alpha_i,\beta_i)} \supseteq V_{(\alpha_{i+1},\beta_{i+1})}$ и $W_{(f(a),f(b))} \supseteq W_{(f(\alpha_i),f(\beta_i))} = L_{(a,b)}(V_{(\alpha_i,\beta_i)})$, то, в силу дифференцируемости f на X', существует точка $c \in X'$, такая, что при $\alpha_i, \beta_i \to c$ отображение $L_{(a,b)}$ стремится к L_c, т.е. $L_{(a,b)}$ есть значение производной от f в точке c.

Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to S$; $\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{U}$ равномерные структуры для X, Y и S соответственно, а $V \in \mathcal{N}, W \in \mathcal{M}$ и $U \in \mathcal{U}$ их окружения.

Пусть $V_{(x,y)}, W_{(f(x),f(y))}$ и $U_{(g(f(x)),g(f(y)))}$ окружения, являющиеся пересечением всех окружений из $\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{U}$, содержащие соответственно точки $(x, y), (f(x), f(y)), (g(f(x)), g(f(y)))$.

Определим функции $L_{(x,y)} : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ и $N_{(f(x),f(y))} : \mathcal{M} \to \mathcal{U}$ следующим образом

$$L_{(x,y)}(V_{(x,y)}) = W_{(f(x),f(y))},$$

$$N_{(f(x),f(y))}(W_{(f(x),f(y))}) = U_{(g(f(x)),g(f(y)))}.$$

Таким образом, если f дифференцируема в точке x, то $L_{(x,y)} \to L_x$ при $y \to x$, а дифференцируемость g в точке $f(x)$ означает, что $N_{(f(x),f(y))} \to N_{f(x)}$ при $f(y) \to f(x)$.

Здесь L_x и $N_{f(x)}$ значения производных функций f и g в точках x и $f(x)$ соответственно. В силу непрерывности f в точке x, из того, что $y \to x$ следует, что $f(y) \to f(x)$ и поэтому значение производной композиции $g \circ f : X \to S$ в точке $x \in X$ есть композиция $N_{f(x)} \circ L_x : \mathcal{N} \to \mathcal{U}$ такая, что

$$N_{f(x)} \circ L_x = \lim_{y \to x} \{N_{(f(x),f(y))} \circ L_{(x,y)}\}.$$

Пусть теперь $f : X \times Y \to Z$ функция двух переменных, где $X \times Y$ и Z равномерные пространства. Пусть снова $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ равномерные структуры на $X \times Y$ и Z соответственно.

Через

$$V_{[(x,y),(x',y')]} = \bigcap_{[(x,y),(x',y')]} V$$

обозначим окружение из $\mathcal{N}$, являющееся пересечением всех окружений из $\mathcal{N}$, содержащих точку $[(x, y), (x', y')]$. Аналогичный смысл имеет обозначение $W_{[f(x,y),f(x',y')]}$.

Для любого $V_{[(x,y),(x',y')]}$ имеет место соотношение [1, с. 202]

$$V_{[(x,y),(x',y')]} = V^o_{[(x,y),(x',y)]} \circ V^o_{[(x',y),(x',y')]},$$

где $V^o_{[(x,y),(x',y)]}$ и $V^o_{[(x',y),(x',y')]}$ некоторые окружения из $\mathcal{N}$, содержащие $[(x,y),(x',y)]$ и $[(x',y),(x',y')]$ соответственно, а операция $\circ$ определяется следующим образом. Если A и B два подмножества из $X \times X$, то $A \circ B$ есть множество тех пар (x,z), для которых существует $y \in X$, такой, что $(x,y) \in A$ и $(y,z) \in B$.

Покажем, что $V^o_{[(x,y),(x',y)]}$ и $V^o_{[(x',y),(x',y')]}$ окружения, содержащиеся в любых окружениях, содержащих $[(x,y),(x',y)]$ и $[(x',y),(x',y')]$ соответственно. Пусть это не так и пусть

$$V_{[(x,y),(x',y)]} \circ V_{[(x',y),(x',y')]} = V^o_{[(x,y),(x',y')]}$$

некоторое окружение, содержащее точку $[(x,y),(x',y')]$. Очевидно, $V^o_{[(x,y),(x',y)]}$ и $V^o_{[(x',y),(x',y')]}$ содержат окружения $V_{[(x,y),(x',y)]}$ и $V_{[(x',y),(x',y')]}$ соответственно, содержащиеся в любых окружениях, содержащих $[(x,y),(x',y)]$ и $[(x',y),(x',y')]$ соответственно. Следовательно,

$$V_{[(x,y),(x',y')]} = V^o_{[(x,y),(x',y)]} \circ V^o_{[(x',y),(x',y')]} \supseteq V_{[(x,y),(x',y)]} \circ$$

$$\circ V_{[(x',y),(x',y')]} = V^o_{[(x,y),(x',y')]},$$

чего нет.

Таким образом,

$$V_{[(x,y),(x',y')]} = V_{[(x,y),(x',y)]} \circ V_{[(x',y),(x',y')]}.$$

Очевидно, что

$$W_{[f(x,y),f(x',y')]} = W_{[f(x,y),f(x',y)]} \circ W_{[f(x',y),f(x',y')]}.$$

Определим отображения

$$L_{[(x,y),(x',y)]} : \mathcal{N} \to \mathcal{M}, L_{[(x',y),(x',y')]} : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$$

при заданных $W_{[(x,y),(x',y)]}$ и $W_{[(x',y),(x',y')]}$ следующим образом

$$L_{[(x,y),(x',y)]}(V_{[(x,y),(x',y)]}) = W_{[f(x,y),f(x',y)]},$$

$$L_{[(x',y),(x',y')]}(V_{[(x',y),(x',y')]}) = W_{[f(x',y),f(x',y')]}$$

Пределы L_x и L_y отображений $L_{[(x,y),(x',y)]}$, при $x' \to x$ и $L_{[(x',y),(x',y')]}$, при $y' \to y$ будем называть значениями производных от функций $f : X \times Y \to Z$ в точке (x, y) по x и y соответственно.

Производными функции $f : X \times Y \to Z$ в точке (x, y) по x и y будем называть функции

$$f'_x : X \times \{y\} \to \mathcal{P}(\mathcal{N}, \mathcal{M}), \quad f'_y : \{x\} \times Y \to \mathcal{P}(\mathcal{N}, \mathcal{M}),$$

такие, что $f'_x(x, y) = L_x$, $f'_y(x, y) = L_y$.

Если положить

$$D_{(x,y)} f(x, y) = \lim_{\substack{x' \to x \\ y' \to y}} W_{[f(x,y),f(x'y')]}$$

и

$$\Delta_x(x, y) = \lim_{x' \to x} \{V_{[(x,y),(x',y)]}\},$$

$$\Delta_y(x, y) = \lim_{y' \to y} \{V_{[(x',y),(x',y')]}\},$$

то

$$D_{(x,y)} f(x, y) = L_x(\Delta_x(x, y)) \circ L_y(\Delta_y(x, y)).$$

У к а з а т е л ь л и т е р а т у р ы

1. *Н. Бурбаки.* Общая топология. Основные структуры. М., 1968. 272 с.

В.В. Жук, О.А. Тумка

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА–МАКЛОРЕНА К НАХОЖДЕНИЮ ТОЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ПОЛУНОРМ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ АРГУМЕНТОВ

Неравенства для производных вида

$$\|f^{(k)}\|_{L_p(T)} \le K \|f\|_{L_p(T)}^{(1-k/n)} \|f^{(n)}\|_{L_p(T)}^{k/n} \tag{1}$$

($0 < k < n$ – целые, $T = \mathbf{R}$ или $\mathbf{R}_+$), справедливые для всех функций $f \in L_p(T)$, у которых $(n-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна на T, а $f^{(n)} \in L_p(T)$ с точной (т.е. наименьшей возможной) константой K, в литературе принято называть неравенствами типа Колмогорова.

Первые точные неравенства типа (1) были получены в работах Ландау ($T = \mathbf{R}_+$, $n = 2$, $k = 1$, $p = \infty$) и Адамара ($T = \mathbf{R}$, $n = 2$, $k = 1$, $p = \infty$) [1,2]. А.Н. Колмогоровым были найдены точные константы в (1) при $T = \mathbf{R}$, $p = \infty$ в общем случае, т.е. при любых $n \geq 2$ и $0 < k < n$ [3, с. 252–263]. В дальнейшем этой тематике было посвящено много работ (подробный обзор известных на настоящий момент результатов имеется в работах [4–7], см. также [8–11]). В настоящей работе установлена общая теорема, с помощью которой удается получить ряд новых точных неравенств для полунорм производных в двумерном случае.

1. В дальнейшем $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{N}$ соответственно множества вещественных, неотрицательных вещественных, натуральных чисел, $D_r = \{0, 1, \ldots, r\}$; $Q_1 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $Q_2 = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, $Q_3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$; B_n – числа Бернулли, $B_n(x)$ – многочлены Бернулли [12, с. 10–12];

$$M(r,k) = \begin{cases} |B_k(1/2)|, & \text{если } k = 0, \ldots, r-1, \\ 0, & \text{если } k = r, \\ (r+1) \int\limits_0^{1/2} |B_r(u) - B_r(1/2)| du, & \text{если } k = r+1 \end{cases}$$

$$N(r,k) = \begin{cases} |B_k(0)|, & \text{если } k = 0, \ldots, r-1, \\ 0, & \text{если } k = r, \\ \frac{r+1}{2} \int\limits_0^{1} |B_r(u) - B_r(0)| du, & \text{если } k = r+1. \end{cases}$$

Через $C(Q_i)$ обозначаем пространство равномерно непрерывных ограниченных функций $f : Q_i \to \mathbf{R}$ с нормой $\|f\|_i = \sup_{x \in Q_i} |f(x)|$; $C^{(n,m)}(Q_i)$ – множество функций $f : Q_i \to \mathbf{R}$, таких, что при любых $k \in D_n$ и $l \in D_m$ существуют (не зависящие от порядка дифференцирования) частные производные порядка $k + l$, причем $\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l} \in C(Q_i)$.

Будем говорить, что полунормированное пространство (G, P) принадлежит классу A_i, если выполнены следующие условия:
1) G — подпространство $C(Q_i)$ (т.е. линейное множество, замкнутое в $C(Q_i)$); 2) для любой $f \in G$ и любого $h \in Q_i$ функция $f(\cdot + h) \in G$; 3) полунорма P такова, что для любой $f \in G$ и любого $h \in Q_i$

имеет место неравенство $P(f(\cdot+h)) \leq P(f)$; 4) существует такая постоянная M, что $P(f) \leq M\|f\|_i$ для любой $f \in G$.

Суммы типа $\sum_{k\in A}$, где A – пустое множество, считаются равными нулю.

2. **Теорема 1.** *Пусть $n, m \in \mathbf{N}$, $(G,P) \in A_i$, $f \in C^{(n+1,m+1)}(Q_i)$, $A \subset D_{n+1}$, $B \subset D_{m+1}$. Тогда*

1) при $i = 1$

$$P\left(f_{xy}^{(2)}\right) \leq 4 \inf_{h_1,h_2>0}\left\{\frac{1}{2}\sum_{k\in A}\frac{h_1^{k-1}}{k!}M(n,k)P\left(f_{x^k y}^{(k+1)}\right)+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{l\in B}\frac{h_2^{l-1}}{l!}M(m,l)P\left(f_{xy^l}^{(l+1)}\right)+$$
$$+\sum_{k\in A}\sum_{l\in B}\frac{h_1^{k-1}h_2^{l-1}}{k!\ l!}M(n,k)M(m,l)P\left(f_{x^k y^l}^{(k+l)}\right)+$$
$$\left.+\sum_{k\in D_{n+1}\setminus A}\ \sum_{l\in D_{m+1}\setminus B}\frac{h_1^{k-1}h_2^{l-1}}{k!\ l!}M(n,k)M(m,l)P\left(f_{x^k y^l}^{(k+l)}\right)\right\}; \quad (2)$$

2) при $i = 2$ оценка (2) имеет место, если в ней $M(n,k)$ и $M(m,l)$ заменить соответственно на $N(n,k)$ и $N(m,l)$;

3) при $i = 3$ оценка (2) имеет место, если в ней $M(m,l)$ заменить на $N(m,l)$.

В связи с приложениями теоремы 1 полезно иметь в виду следующие хорошо известные соотношения:

$$B_r(0) = B_r, \qquad B_r(1/2) = -(1-2^{-r+1})B_r,$$
$$\int_0^{1/2}|B_r(u)-B_r(1/2)|\,du = \left|\frac{B_{r+1}(1/2)-B_{r+1}(0)}{r+1}-\frac{1}{2}B_r(1/2)\right|;$$

если $r > 1$, то

$$\int_0^1|B_r(u)-B_r(0)|\,du = 2\int_0^{1/2}|B_r(u)-B_r(0)|\,du =$$
$$= 2\left|\frac{B_{r+1}(1/2)-B_{r+1}(0)}{r+1}-\frac{1}{2}B_r(0)\right|;$$

$$\int\limits_0^1 |B_1(u) - B_1(0)|\, du = \frac{1}{2}.$$

Следствие 1. *Пусть* $(G, P) \in A_i$, $f \in C^{(2,2)}(Q_i)$. *Тогда*
1) при $i = 1$

$$P(f_{xy}^{(2)}) \le P(f)^{1/2} P(f_{x^2y^2}^{(4)})^{1/2} + P(f_{x^2}^{(2)})^{1/2} P(f_{y^2}^{(2)})^{1/2},$$

$$P(f_{xy}^{(2)}) \le \left(8P(f)P(f_{x^2}^{(2)})P(f_{xy^2}^{(3)})^2\right)^{1/4},$$

$$P(f_{xy}^{(2)}) \le \left(8P(f_x')^2 P(f_{x^2}^{(2)})P(f_{x^2y^2}^{(4)})\right)^{1/4};$$

2) при $i = 2$

$$P(f_{xy}^{(2)}) \le 2\left(P(f)^{1/2} P(f_{x^2y^2}^{(4)})^{1/2} + P(f_{x^2}^{(2)})^{1/2} P(f_{y^2}^{(2)})^{1/2}\right),$$

$$P(f_{xy}^{(2)}) \le \left(64P(f)P(f_{x^2}^{(2)})P(f_{xy^2}^{(3)})^2\right)^{1/4},$$

$$P(f_{xy}^{(2)}) \le \left(64P(f_x')^2 P(f_{x^2}^{(2)})P(f_{x^2y^2}^{(4)})\right)^{1/4};$$

3) при $i = 3$

$$P(f_{xy}^{(2)}) \le \sqrt{2}\left(P(f)^{1/2} P(f_{x^2y^2}^{(4)})^{1/2} + P(f_{x^2}^{(2)})^{1/2} P(f_{y^2}^{(2)})^{1/2}\right),$$

$$P(f_{xy}^{(2)}) \le \left(32P(f)P(f_{x^2}^{(2)})P(f_{xy^2}^{(3)})^2\right)^{1/4},$$

$$P(f_{xy}^{(2)}) \le \left(32P(f_x')^2 P(f_{y^2}^{(2)})P(f_{x^2y^2}^{(4)})\right)^{1/4},$$

$$P(f_{xy}^{(2)}) \le \left(16P(f_y')^2 P(f_{x^2}^{(2)})P(f_{x^2y^2}^{(4)})\right)^{1/4}.$$

Следствие 2. *Пусть* $(G, P) \in A_i$, $f \in C^{(3,3)}(Q_i)$. *Тогда*
1) при $i = 1$

$$P(f_{xy}^{(2)}) \le \left(\frac{9}{4}P(f)P(f_{x^2}^{(2)})P(f_{xy^3}^{(4)})\right)^{1/3},$$

$$P(f_{xy}^{(2)}) \le \left(3^{10}2^{-15}P(f)^4 P(f_{x^3}^{(3)})^2 P(f_{xy^3}^{(4)})^3\right)^{1/9},$$

$$P(f^{(2)}_{xy}) \le \Big(3^8 2^{-12} P(f'_x)^6 P(f^{(3)}_{y^3})^2 P(f^{(6)}_{x^3y^3})\Big)^{1/9},$$

$$P(f^{(2)}_{xy}) \le \Big(3^4 2^{-5} P(f'_x)^4 P(f^{(3)}_{y^3}) P(f^{(5)}_{x^2y^3})\Big)^{1/6};$$

2) при $i = 3$

$$P(f^{(2)}_{xy}) \le \Big(72 P(f)^2 P(f^{(3)}_{x^3}) P(f^{(3)}_{xy^2})^3\Big)^{1/6},$$

$$P(f^{(2)}_{xy}) \le \Big(72 P(f'_x)^3 P(f^{(2)}_{y^2})^2 P(f^{(5)}_{x^3y^2})\Big)^{1/6}.$$

В условиях следствий 1 и 2 константы в каждом из приведенных неравенств являются точными. Они, в частности, реализуются, когда $G = C(Q_i)$, $P(f) = \|f\|_i$.

Нижние грани в соотношениях, содержащихся в теореме 1, могут быть эффективно вычислены и в ряде других случаев, но получающиеся здесь формулы становятся громоздкими. Приведем два примера результатов такого рода.

Следствие 3. *Пусть* $(G, P) \in A_1$, $f \in C^{(3,3)}(Q_1)$. *Тогда*

$$P(f^{(2)}_{xy}) \le \frac{2^{7/6} 3^{1/2} C_2^{1/3} B^{1/2} (7AD - BC_2 + F^{1/2})}{D^{1/6} (AD - BC_2 + F^{1/2})^{1/2} (-AD - BC_2 + F^{1/2})^{1/3}},$$

$$P(f^{(2)}_{xy}) \le \frac{3^{1/3}}{2^{4/3}} \frac{(-6C_1C_2 + (36C_1C_2 + 12AC_1C_2E)^{1/2} + AE)}{E^{1/3}(6C_1C_2 - (36C_1C_2 + 12AC_1C_2E)^{1/2} + AE)^{1/3}},$$

где

$$A = P(f); \quad B = \frac{1}{8} P(f^{(2)}_{x^2}); \quad C_1 = P(f^{(3)}_{x^3});$$

$$C_2 = \frac{1}{24} P(f^{(3)}_{y^3}); \quad D = \frac{1}{192} P(f^{(5)}_{x^2y^3}); \quad E = P(f^{(6)}_{x^3y^3});$$

$$F = A^2D^2 + 34ABC_2D + B^2C_2^2.$$

В условиях следствия 3 константы в каждом из приведенных неравенств являются точными. Они, в частности, реализуются, когда $G = C(Q_i)$, $P(f) = \|f\|_i$.

3. При доказательстве теоремы 1 используются следующие утверждения:

Лемма 1. *Пусть* $i \in \{1,2,3\}$, $(G,P) \in A_i$, $a = (a_1,a_2)$, $b = (b_1,b_2)$ *из* $\mathbf{R}^2$, $a < b$ (*т.е.* $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$), *функция* $K : Q_i \times [a,b] \to \mathbf{R}$ *равномерно непрерывна,* $K(\cdot,t) \in G$ *при любом* $t \in [a,b]$, $g(x) = \int_{[a,b]} K(x,t)dt$. *Тогда функция* $g \in G$ *и* $P(g) = \int_{[a,b]} P\big(K(\cdot,t)\big)dt$.

Теорема А (см. [12, с. 20–22]). *Пусть 1-периодическая функция* B_n^* *определена равенствами* $B_n^*(x) = B_n(x)$ *при* $0 \le x < 1$, $B_n^*(x+1) = B_n^*(x)$; *функция* f *имеет непрерывную производную порядка* r *на* $[a,b]$, $h = b - a$. *Тогда при любом* $x \in [a,b]$

$$f(x) = \frac{1}{h}\int\limits_a^b f(t)dt + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{h^{k-1}B_k\big((x-a)/h\big)}{k!}\Big(f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\Big) -$$

$$-\frac{h^{r-1}}{r!}\int\limits_a^b f^{(r)}(t)\left(B_r^*\Big(\frac{x-t}{h}\Big) - B_r\Big(\frac{x-a}{h}\Big)\right)dt\ . \qquad (3)$$

В работе формула (3) используется при $x = (a+b)/2$ и $x = a$.

Указатель литературы

1. *Landau E.* Einige Ungleichungen für zweimal differentierbare Funktionen // Proc. London Math. Soc. (2). 1913. Vol. 13. P. 43–49.

2. *Hadamard J.* Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées // Soc. Math. France, Comptes rendus des Séances. 1914. P. 68–72.

3. *Колмогоров А.Н.* Избранные труды. Математика и механика.– М., Наука, 1985. 470 с.

4. *Тихомиров В.М., Магарил-Ильяев Г.П.* Неравенства для производных // Колмогоров А.Н. Избр. тр. Математика и механика. М., Наука, 1985. С. 387–390.

5. *Тихомиров В.М., Магарил-Ильяев Г.П.* О неравенствах для производных колмогоровского типа // Матем. сб., 1997. Т. 188, №12. С. 73–106.

6. *Арестов В.В., Габушин В.Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Матем. 1995. №11(402). С. 42–68.

7. *Арестов В.В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Усп. матем. наук. 1996. Т. 51, №6. С. 89–124.

8. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Неравенства типа Колмогорова и аппроксимация функциональных классов // Доповіді НАН України. 1997. т10. С. 11–16.

9. *Бабенко В.Ф., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* О точных неравенствах типа Колмогорова в случае малых гладкостей // Доповіді НАН України. 1998. №6. С. 11–14.

10. *Тимошин О.А.* Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной // Изв. РАН. Сер. мат. 1998. Т. 62, №1. С. 201–210.

11. *Буренков В.И., Гусаков В.А.* О точных постоянных в неравенстве для модуля производной и о наилучших приближениях функционала дифференцирования в точке отрезка// Докл. РАН. 1997. Т. 356, №3. С. 295–296.

12. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. М., Наука, 1967. 500 с.

Ю. В. Заика

СОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ НАБЛЮДЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

В работе в терминах функциональной зависимости получено описание наблюдаемых функций в нелинейных динамических системах, аналитических по фазовым переменным. Для обработки измерений используются интегральные операторы, что влечет определенную помехоустойчивость операции восстановления. Развивается аналог теории двойственности, известной для линейных задач наблюдения и управления. Предложены вычислительные схемы решения нелинейных задач наблюдения.

1. Введение

Рассмотрим в области $U \subseteq \mathbf{R}^n$ систему наблюдения

$$\dot{x} = f(x),\ y = g(x), \quad f : U \to \mathbf{R}^n,\ g : U \to \mathbf{R}^m, \tag{1}$$

моделирующую закон движения и доступную информацию о движении. Вектор-функции f, g предполагаем гладкими, а для основных результатов статьи — вещественными аналитическими в U. Задан отрезок наблюдения $[0,T]$ и область возможных конечных состояний $U_T = \{x(T)\} \subseteq U$, для которых решения векторного дифференциального уравнения в (1) $x(\cdot\,;x,T)$ $\big(x(T;x,T) = x \in U_T\big)$ продолжимы на $[0,T]$. Задача наблюдения состоит в определении по $y(\cdot\,;x,T) = g\big(x(\cdot\,;x,T)\big) : [0,T] \to \mathbf{R}^m$ фазового вектора $x = x(T)$. Запись $y(\cdot\,;x,T)$ означает, что известная на $[0,T]$ вектор-функция измерений $y(\cdot)$ однозначно определяется искомым неизвестным состоянием x в момент времени T. Предполагается, что задачу необходимо решать систематически. Поэтому нас интересуют операции

*). Работа является сокращенным и переработанным вариантом статьи в журнале Фундаментальная и прикладная математика, 2001, Т. 7, №3, с. 735–760.

вычисления по любой возможной реализации $y(\cdot)$ соответствующего x из области U_T. Можно ставить задачу и в терминах неизвестных начальных данных $x^0 = x(0) \in U_0$, это непринципиально. Обычно интересуются фазовым состоянием к моменту окончания времени наблюдения. Если используются только значения $y(t)$, $t \in \Theta$ $\bigl(\Theta = [0, \theta], \theta < T\bigr)$, то говорят о задаче прогнозирования. В рамках принятой модели по $x(T)$ (или x^0) уже можно восстановить численно решение и траекторию движения.

Установить наблюдаемость пары (f, g) непосредственно по соответствию $x \mapsto y(\cdot\,; x, T)$ затруднительно, поскольку речь идет об обращении отображения в пространство вектор-функций. Поэтому обычно переходят к исследованию так называемого отображения наблюдаемости $H : x \mapsto y(\cdot\,; x, T) \mapsto z \in \mathbf{R}^p$, вычисляя значения p функционалов на $y(\cdot)$. Если H инъективно на множестве $V \subseteq U_T$ $\bigl(H(x) \leftrightarrow x \in V\bigr)$, то (f, g) наблюдаема в V и вектор $x = x(T) \in V$ единственным образом определяется по $z = H(x)$. Значения z известны по результатам обработки измерений $y(\cdot)$. По определению наблюдаемость пары (f, g) в $V \subseteq U_T$ на отрезке времени $[0, T]$ означает $y(\cdot\,; x, T) \leftrightarrow x \in V$. Наиболее часто используются следующие способы построения H:

$$a)\ x \mapsto \bigl(y'(t_1), \ldots, y'(t_\ell)\bigr)',\ t_i \in [0, T],\ \ell m = p\,;$$

$$b)\ x \mapsto \bigl(y'(T), \dot{y}'(T), \ldots, y^{(\ell-1)\prime}(T)\bigr)';$$

$$c)\ x \mapsto \bigl(\langle k_1, y\rangle, \ldots, \langle k_p, y\rangle\bigr)',\ \langle k, y\rangle = \int_0^T k'(\tau)\, y(\tau)\, d\tau.$$

Некоторые достаточные условия инъективности отображений в конечномерных пространствах можно найти, например, в [1, 2]. Принципиален вопрос: в каком классе пар (f, g) задача наблюдаемости сводится к проблеме разрешимости конечной системы уравнений относительно $x = x(T)$, полученной с помощью способов a)—c) построения отображения наблюдаемости?

С целью упрощения обозначений и без существенного для дальнейшего изложения ограничения общности можно считать $m = 1$.

Несколько слов о результатах аналитической теории наблюдения. Подробнее — в серии статей К. Е. Старкова в 80—90-е годы в журнале Автоматика и телемеханика (см. также [6]). Для полиномиальной системы (1) $\bigl($пары $(f, g)\bigr)$ при определении $x(T)$ достаточно ограничиться вычислением конечного числа производных

$y^{(i)}(t_*)$, $t_* \in [0,T]$ [5]. Но необходимое их количество может оказаться сколь угодно большим. "Всего лишь" n-параметрическое семейство $\bigl\{y(\cdot\,;x,T)\bigm| x\in U_T\bigr\}$ весьма сложно устроено. Для стационарной наблюдаемой вещественной аналитической пары (f,g) без потери информации об искомом $x(T)$ вместо $y(\cdot)$ можно ограничиваться некоторым набором $2n+1$ значений $y(t_j)$ [7]. Моменты времени t_j фиксируются и не зависят от конкретной реализации $y(\cdot)$. Но в общем случае множество "удачных" программ наблюдений $\{t_1,\dots,t_{2n+1}\}$ не является открытым в $[0,T]^{2n+1}$. С учетом погрешностей задания t_j это может привести к потере наблюдаемости. Устойчивые к возмущениям дискретные программы наблюдений рассмотрены в [12].

Если на измерения существенное влияние оказывают помехи, то предпочтительнее использовать интегральные операции обработки $y(t)$. Основы соответствующего математического аппарата в линейном случае изложены, например, в [3]. Напомним результат, который будет взят за основу. Пусть $f = F\,x$, $g = G\,x$, где F, G — матрицы $n\times n$, $m\times n$. Если в сопряженной системе

$$\dot V(t) = -F'V(t) + G'k(t), \quad V(0)=0, \tag{2}$$

построить управление $k(\cdot)$ из условия $V(T)=h$, то по информации $y(\cdot)$ вычисляется проекция неизвестного $x(T)$ на вектор h: $h'x(T) = \bigl\langle k,y\bigr\rangle_{L_2}$ $\forall\,x(T)\in\mathbf{R}^n$. Совокупность всех $h\in\mathbf{R}^n$, для которых по любой возможной вектор-функции $y(\cdot)$ однозначно восстанавливается $h'x(T)$, описывается множеством достижимости $\mathcal{D}_T = \bigl\{V(T)\bigr\}$. Этот подход, известный как принцип двойственности, в [8, 9, 10, 11] обобщен на нелинейный случай. Построение оператора восстановления по измерениям $y(\cdot)$ значений данной функции $\varphi : U_T \to \mathbf{R}^1$ в форме

$$\varphi\bigl(x(T)\bigr) = \int_0^T k\bigl(\tau, y(\tau)\bigr)\,d\tau \quad \forall\,x(T)\in U_T \tag{3}$$

сводится к задаче управления: в сопряженной системе

$$v_t(t,x) + v_x(t,x)\cdot f(x) = k\bigl(t,g(x)\bigr), \quad v(0,x)=0, \tag{4}$$

выбрать $k(\cdot,\cdot)$ из условия $v(T,x)=\varphi(x)$, $x\in U_T$. Детали в дальнейшем будут уточнены. При $(f,g)=(F,G)$, $k(t,y)=k'(t)\,y$ получаем $v(t,x)=V'(t)\,x$, где $V(t)$ удовлетворяет (2). Возникновение уравнения в частных производных естественно, поскольку задача построения операции наблюдения для области фазового пространства по существу является распределенной. Важно, что уравнение (4) линейное по паре k, v и возможно применение теории управления и численных методов решения линейных граничных задач.

2. Наблюдение по конечному числу проекций

Остановимся вначале на линейных интегральных операторах восстановления (3): $\varphi\big(x(T)\big) = \big\langle k,y\big\rangle_{L_2}$, $L_2 = L_2[0,T]$, $m = 1$. Имея в виду прикладной характер задачи, допустимые весовые функции $k(\cdot)$ обработки измерений $y(\cdot)$ считаем кусочно непрерывными на $[0,T]$. Функционалы $y(\cdot) \mapsto \langle\, k,y \,\rangle$ и сами числа (моменты) $\langle\, k,y \,\rangle$ будем называть проекциями. Здесь возникает ряд вопросов. С вычислительной точки зрения важно иметь конечномерное представление $y(\cdot)$. Можно ли подобрать такие $k_1(\cdot),\dots,k_p(\cdot)$, чтобы сужение информации $y(\cdot)$ до значений конечного числа функционалов $J_i\big(y(\cdot)\big) = \big\langle k_i,y\big\rangle_{L_2}$ не приводило к потере информации об искомом $x(T)$ в смысле взаимно однозначного соответствия $y(\cdot) \leftrightarrow \Big(J_1\big(y(\cdot)\big),\dots,J_p\big(y(\cdot)\big)\Big)$, $x(T) \in U_T$? В случае успеха проблема "запоминания" $y(\cdot)$ сводится к интегрированию в масштабе реального времени по мере поступления измерений $y(t)$, что сравнительно легко осуществляется техническими средствами. Иной акцент вопроса: возможна ли ситуация, когда пара (f,g) наблюдаема $\big($инъективно отображение $x(T) \mapsto y(\cdot)\big)$, но по конечному числу проекций $\langle\, k_i,y \,\rangle$ однозначно определять $x(T)$ невозможно? Здесь $k_i(\cdot)$, $1 \le i \le p$, фиксируются одни и те же для всех возможных $y(\cdot)$ $\big(\, x(T) \in U_T\big)$. Если указанные наборы $k_i(\cdot)$ существуют, как выбрать по возможности минимальным p? Пусть $k(\cdot)$ фиксирована. Цепочка $x(T) \mapsto y(\cdot) \mapsto \langle\, k,y \,\rangle$ порождает функцию $\varphi\big(x(T)\big) = \langle\, k,y \,\rangle$. Как дать аналитическое описание $\varphi(\cdot)$? Важен и в определенном смысле обратный вопрос. Обычно измеряется часть фазовых координат, требуется лишь восстанавливать оставшиеся или, более общо, значения заданных функций $\varphi\big(x(T)\big)$. Как для заданной $\varphi(\cdot)$ подобрать $k(\cdot,\cdot)$ чтобы выполнялось (3), хотя бы с требуемой точностью? Ответы на поставленные вопросы в общем случае представляются труднообозримой проблемой. Изложим некоторые результаты в случае аналитичности по фазовым переменным.

О п р е д е л е н и е 1. Функцию $\varphi : U_T \to \mathbf{R}^1$ назовем наблюдаемой в множестве $M \subseteq U_T$, если найдется функционал Λ из условия $\varphi(x) = \Lambda\big(\, y(\cdot\,;\, x,T)\big)$, $x \in M$.

Наблюдаемость функции φ в M означает, что ее значения $\varphi(x)$ на неизвестном априори $x = x(T)$ однозначно восстанавливаются по доступной информации $y(\cdot\,;\, x, T)$, если дополнительно известно включение $x \in M$. Наблюдаемость пары (f, g) эквивалентна наблюдаемости всех координат $\varphi(x) = x_i$, $1 \le i \le n$, в области U_T. Когда исследуется наблюдаемость функции φ в M и φ задана лишь на подмножестве $\widetilde{M}$ $\bigl(M \subseteq \widetilde{M} \subseteq U_T\bigr)$, то считаем ее доопределенной в $U_T \setminus \widetilde{M}$ произвольно. Обозначим через $\Phi(M)$ множество всех наблюдаемых в M функций φ. Очевидно, $\Phi(\widetilde{M}) \subseteq \Phi(M)$ при $M \subseteq \widetilde{M}$.

О п р е д е л е н и е 2. Базисом множества $\Phi(M)$ наблюдаемых в M функций назовем такую конечную совокупность элементов φ_i из $\Phi(M)$, $1 \le i \le p$, что имеет место функциональная зависимость

$$\varphi(x) = F_\varphi\bigl(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)\bigr) \quad \forall\, \varphi \in \Phi(M),\ \forall\, x \in M.$$

Образно говоря, множество $\Phi(M)$ является нелинейной (функциональной) оболочкой базисных наблюдаемых функций. Вычислив по $y(\cdot\,;\, x, T)$ $(x \in M)$ значения $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)$, дополнительной информации о неизвестном $x = x(T)$ из $y(\cdot)$ уже извлечь невозможно. Наблюдаемость (f, g) в $M \subseteq U_T$ означает взаимно однозначное соответствие $\bigl(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)\bigr) \leftrightarrow x \in M$. Если последним свойством обладает один из базисов, то это же справедливо и для любого другого (при условии их существования).

Действительно, пусть Λ_i — функционалы, соответствующие базисным функциям $\varphi_i \in \Phi(M)$ согласно определению 1, $\{k_i,\, i \ge 1\}$ — полная в $L_2 = L_2[0, T]$ система функций, т. е. $\bigl\{\langle \phi, k_i \rangle,\, i \ge 1\bigr\} \leftrightarrow \phi(\cdot) \in L_2$. Тогда

$$\psi_i \in \Phi(U_T) \subseteq \Phi(M), \quad \psi_i(x) = \bigl\langle k_i,\, y(\cdot\,;\, x, T)\bigr\rangle,\ x \in U_T.$$

По определению базисности $\psi_i(x) = F_i\bigl(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)\bigr)$ $\forall\, i \ge 1$, $\forall\, x \in M$. Значит, по $\varphi_i(x) = \Lambda_i\bigl(y(\cdot\,;\, x, T)\bigr)$, $1 \le i \le p$, числа $\psi_i(x)$, $i \ge 1$, определяются однозначно. В силу полноты $\{k_i,\, i \ge 1\}$ имеем $\bigl(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)\bigr) \leftrightarrow y(\cdot\,;\, x, T)$ и вместо функций $y(\cdot\,;\, x, T)$ на $[0, T]$ можно оперировать p-мерными векторами $\bigl(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)\bigr)$, $x \in M$. Эти же $\varphi_i(x)$ образуют базис $\Phi(\widetilde{M})$ $\forall\, \widetilde{M} \subseteq M$.

Функционалы Λ_i в определении 1 могут быть различными, в частности, $\Lambda_i\bigl(y(\cdot)\bigr) = y(t_i)$, $\Lambda_i\bigl(y(\cdot)\bigr) = y^{(i)}(t_*)$. Ограничимся пока классом линейных интегральных операций $\Lambda\big(y(\cdot)\big) = \langle\, k, y\,\rangle$. Очевидно, по определению функции $\psi(x) = \big\langle k,\, y(\cdot\,;\, x, T)\big\rangle$ наблюдаемы в любом подмножестве U_T, т. е. $\psi \in \Phi(M)$ $\forall M \subseteq U_T$. При необходимости класс допустимых $k(\cdot)$ можно расширить до L_2.

Теорема 1. *Пусть пара (f, g) является вещественной аналитической в U: $f \in C^{\,\omega}(U, \mathbf{R}^n)$, $g \in C^{\,\omega}(U, \mathbf{R}^1)$. Тогда для любого множества M с компактным замыканием в U_T из произвольной полной в L_2 системы допустимых весовых функций $\big\{k_i,\, i \geq 1\big\}$ можно выделить такие $k_{i_\nu}(\cdot)$, что $\varphi_\nu : U_T \to \mathbf{R}^1$ $\big(\varphi_\nu(x) = \big\langle k_{i_\nu},\, y(\cdot\,;\, x, T)\big\rangle,\ 1 \leq \nu \leq p\big)$ образуют конечный базис $\Phi(M)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим в области $U_T \times U_T$ аналитические функции

$$\Delta\psi_i\big(x^1, x^2\big) = \psi_i\big(x^1\big) - \psi_i\big(x^2\big) = \big\langle k_i,\, y\big(\cdot\,;\, x^1, T\big) - y\big(\cdot\,;\, x^2, T\big)\big\rangle,$$

$$x^j \in U_T.$$

Можем считать, что $\Delta\psi_i$ заданы и аналитичны в $W = U_T^c \times U_T^c \subseteq$ $\subseteq \mathbf{C}^{\,2n}$, где область U_T^c является достаточно малой окрестностью U_T в $\mathbf{C}^{\,n}$. Это продолжение можно задать и формулой

$$\Delta\psi_i\big(z^1, z^2\big) = \big\langle k_i,\, y\big(\cdot\,; z^1, T\big) - y\big(\cdot\,; z^2, T\big)\big\rangle, \quad z^j \in U_T^c.$$

Смысл записи $y(\cdot\,; z, T)$, $z \in U_T^c$, сохраняется, поскольку решения $\dot{x} = f(x)$ можно рассматривать и при комплексных условиях Коши $x(T) = z \in U_T^c \subseteq \mathbf{C}^{\,n}$. Такие решения продолжимы на $[0, T]$ для достаточно малой окрестности U_T.

Обозначим через Z_i множество нулей функции $\Delta\psi_i$ в W. Тогда общие нули $\Delta\psi_i$ образуют аналитическое подмножество $Z = \cap_{j=1}^{\infty} Z_j$ области W и существуют такие номера $i_1, \ldots, i_p$, что

$$Z \cap (M \times M) = \big(\cap_{\nu=1}^{p} Z_{i_\nu}\big) \cap (M \times M).$$

Здесь используем терминологию и результат [13, с. 53]. Пусть Ω — область в $\mathbf{C}^{\,n}$. Множество $A \subset \Omega$ называется (комплексным) аналитическим подмножеством Ω, если для каждой точки $a \in \Omega$ найдутся ее окрестность U и голоморфные (аналитические) в ней функции $f_1, \ldots, f_N$, такие что $A \cap U = \big\{z \in U \,|\, f_1(z) = \ldots = f_N(z) = 0\big\}$. Другими словами, локально A есть множество общих нулей конечных наборов голоморфных функций. Если $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — произвольное семейство аналитических подмножеств Ω, то $A=\cap_{\alpha\in I}A_\alpha$ — тоже аналитическое подмножество в Ω, причем для любого K с компактным замыканием в Ω (т. е. K ограничено и замыкание $\mathrm{cl}\,K\subset\Omega$) найдется конечное подмножество $J\subset I$, такое что $A\cap K=\bigl(\cap_{\alpha\in J}A_\alpha\bigr)\cap K$.

Вернемся к доказательству. Из $\Delta\psi_{i_\nu}\bigl(x^1,x^2\bigr)=0$ для $1\le\nu\le p$, $x^j\in M$ следует $\Delta\psi_i\bigl(x^1,x^2\bigr)=0$, $i\ge1$, и в силу полноты $\bigl\{k_i,\,i\ge1\bigr\}$ получаем $y\bigl(\cdot\,;\,x^1,T\bigr)=y\bigl(\cdot\,;\,x^2,T\bigr)$. Отсюда $\forall\,x\in M$

$$\bigl(\varphi_1(x),\dots,\varphi_p(x)\bigr)=\bigl(\langle\,k_{i_1},y\,\rangle,\dots,\langle\,k_{i_p},y\,\rangle\bigr)\leftrightarrow y(\cdot\,;\,x,T),$$

$$\varphi(x)=\Lambda\bigl(\,y(\cdot\,;\,x,T)\bigr)=F_\varphi\bigl(\varphi_1(x),\dots,\varphi_p(x)\bigr),\ \forall\,\varphi\in\Phi(M).$$

Согласно определению функции φ_i образуют конечный базис $\Phi(M)$.

З а м е ч а н и е 1. Требование полноты $\{k_i\}$ в L_2 можно ослабить — достаточно $\bigl\{\bigl\langle k_i,\,y(\cdot\,;\,x,T)\bigr\rangle,\,i\ge1\bigr\}\leftrightarrow y(\cdot\,;\,x,T)$, $x\in U_T$ $\bigl($полноты на $Y=\bigl\{y(\cdot)\bigr\}\bigr)$. Можно учесть и ограничения реализации $k_i(\cdot)$ $\bigl(|k_i(t)|\le\bar k\,,\dots\bigr)$. Число базисных проекций p зависит не только от f, g, M, но и от удачного выбора системы $\{k_i\}$.

Проблему поиска базиса можно сформулировать в алгебраических терминах. Рассмотрим в кольце $C^\omega(W)$ аналитических в W функций идеал, порожденный множеством $\{\Delta\psi_i,\,i\ge1\}$. Элементы этого идеала — конечные линейные комбинации функций $\Delta\psi_i$ с коэффициентами из $C^\omega(W)$. Конечный базис этого идеала, когда он существует, и определяет номера базисных проекций $\langle\,k_i,y\,\rangle$ для $M=U_T$ $\bigl(\Rightarrow\forall M\subseteq U_T\bigr)$. В частности, из нётеровости кольца ростков аналитических функций в точке следует [14, с. 50], что для семейства функций $\mathcal F$, голоморфных в окрестности $\mathcal O$ некоторой точки a, можно указать окрестность $\widetilde{\mathcal O}\subseteq\mathcal O$ $(a\in\widetilde{\mathcal O})$ и набор $f_1,\dots,f_N\in\mathcal F$, обладающие свойством: для каждой $f\in\mathcal F$ существуют такие голоморфные в $\widetilde{\mathcal O}$ функции $h_1,\dots,h_N$, что $f=h_1f_1+\ldots+h_Nf_N$ в $\widetilde{\mathcal O}$.

Поэтому $\forall\,\bar x\in U_T$ существует достаточно малая окрестность

$$P_\varepsilon=\bigl\{z\in\mathbf C^n\bigm|\,\|z-\bar x\|=\max_i|z_i-\bar x_i|<\varepsilon\bigr\}\subseteq U_T^c\quad\bigl(P_\varepsilon\cap\mathbf R^n\subseteq U_T\bigr)$$

и конечный набор функций $\Delta\psi_{i_1},\dots,\Delta\psi_{i_q}$ из условий

$$\Delta\psi_j\bigl(z^1,z^2\bigr)=\sum\nolimits_{\nu=1}^q\alpha_{j\nu}(z^1,z^2)\,\Delta\psi_{i_\nu}\bigl(z^1,z^2\bigr),\quad j\ge1,$$

где $\big(z^1, z^2\big) \in P_\varepsilon \times P_\varepsilon$, $\alpha_{j\nu} \in C^\omega\big(P_\varepsilon \times P_\varepsilon\big)$. Тогда

$$\big[\Delta\psi_{i_\nu}\big(x^1, x^2\big) = 0,\ 1 \le \nu \le q, \quad x^j \in M = P_\varepsilon \cap U_{\scriptscriptstyle T}\big]$$

$$\Rightarrow \big[\Delta\psi_i\big(x^1, x^2\big) = 0,\ i \ge 1\big] \Rightarrow y\big(\cdot\,;\, x^1,\, T\big) = y\big(\cdot\,;\, x^2,\, T\big).$$

Базисом $\Phi(M)$ будут функции $\varphi_\nu(x) = \psi_{i_\nu}(x) = \big\langle k_{i_\nu},\, y(\cdot\,;\, x, T)\big\rangle$:

$$\big(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_q(x)\big) \leftrightarrow y(\cdot\,;\, x, T), \quad x \in M = P_\varepsilon \cap U_{\scriptscriptstyle T}.$$

Если нет априорных ограничений на структуру весовых функций обработки измерений $\big(\,k(\cdot) \in \{k_i\}\big)$, то результат можно усилить $\big(\,M = U_{\scriptscriptstyle T},\, p = 2n + 1\,\big)$.

Теорема 2. *Пусть* $\big\{k_i,\, i \;\ge\; 1\big\}$ — *произвольная полная в* L_2 *система непрерывных функций на* $[0, T]$. *Существует семейство наборов из* $2n + 1$ *функций* $\{r_i(\cdot)\}$, *для которых* $\varphi_i(x) = \big\langle r_i, y(\cdot\,;\, x, T)\big\rangle$, $0 \le i \le 2n$, *образуют базис* $\Phi(U_{\scriptscriptstyle T})$. *Каждая* $r_j(\cdot)$ *представима равномерно сходящимся на* $[0, T]$ *рядом по* $\{k_i\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся следующим результатом из теории комплексных аналитических множеств [13, с. 54]. Пусть $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — произвольное семейство функций, голоморфных в заданной области $\Omega \subseteq \mathbf{C}^n$. Тогда множество их общих нулей Z есть аналитическое подмножество в Ω и существуют наборы из $n + 1$ функций $g_i \in C^\omega(\Omega)$, общие нули которых также совпадают с Z.

Укажем модификацию доказательства этого факта применительно к рассматриваемой задаче. Вначале приведем схему построения g_n. Пусть Ω_i — связные компоненты Ω, не принадлежащие Z, и $a_i \in \Omega_i \backslash Z$ — произвольно выбранные точки. Для каждого i найдется функция f_{α_i}, такая что $f_{\alpha_i}(a_i) \ne 0$. Представим Ω в виде счетного объединения компактов $\cup K_j$ $(K_j \subseteq K_{j+1},\ \forall\, K\ \exists\, s : K \subset K_s)$. Подберем индукцией по j числа c_j так, чтобы

$$|\, c_j f_{\alpha_j}(z)\,| < 2^{-j}\ \forall\, z \in K_j,$$

$$\Big|\sum\nolimits_{k=1}^{j} c_k f_{\alpha_k}(a_i)\Big| > 2^{-1}\big|\, c_i f_{\alpha_i}(a_i)\,\big|, \quad \forall\, i \le j\,. \qquad (5)$$

Ряд $\sum c_i f_{\alpha_i}$ равномерно на компактах сходится в Ω к голоморфной функции, которую обозначим g_n. По построению $g_n(a_i) \ne 0\ \forall\, i \Rightarrow$

$\dim(Z_{g_n}\cap\Omega_i)<n$, где Z_{g_n} — нули g_n в Ω. Остальные $g_{n-1},\ldots,g_0$ строятся в [13] по индукции аналогичным образом: $g_s\big|_Z\equiv 0$ и все неприводимые компоненты размерности $\geq s$ аналитического подмножества $Z_{g_n}\cap\ldots\cap Z_{g_s}$ в Ω принадлежат Z. Множество общих нулей $g_0,\ldots,g_n$ совпадает с Z.

Этот результат следует применить к семейству аналитических в области $\Omega=W=U_T^c\times U_T^c\subseteq\mathbf{C}^{2n}$ функций $\Delta\psi_i:W\to\mathbf{C}$, полученных с помощью аналитического продолжения $\psi_i(x)$ из $U_{\scriptscriptstyle T}$ в достаточно малую окрестность $U_{\scriptscriptstyle T}^c\supset U_{\scriptscriptstyle T}$ в $\mathbf{C}^n$: $\psi_i(z)=\big\langle k_i,\,y(\cdot\,;\,z,{\scriptstyle T})\big\rangle$, $z=x({\scriptstyle T})\in U_{\scriptscriptstyle T}^c$ с той лишь разницей, что коэффициенты c_j будем подбирать из условия $\forall\,\big(z^1,z^2\big)\in K_j$

$$\big|\,c_j\,\Delta\psi_{\alpha_j}\big(z^1,z^2\big)\big|=\big|\big\langle\,c_j\,k_{\alpha_j},\,y\big(\cdot\,;\,z^1,{\scriptstyle T}\big)-y\big(\cdot\,;\,z^2,{\scriptstyle T}\big)\big\rangle\big|$$

$$\leq\big\|\,c_j\,k_{\alpha_j}\big\|_C\cdot\big\|\,y\big(\cdot\,;\,z^1,{\scriptstyle T}\big)-y\big(\cdot\,;\,z^2,{\scriptstyle T}\big)\big\|_{L_1}\leq 2^{-j}.$$

При этом сохраняем второе определяющее c_j неравенство в (5). Эта корректировка обеспечит не только сходимость ряда $\sum c_i\Delta\psi_{\alpha_i}$ в W к аналитической функции, но и ряда $\sum c_ik_{\alpha_i}$ в $C[0,T]$. Используем такие построения по индукции и обозначим суммы полученных рядов в $C[0,T]$ через $r_{2n},\ldots,r_0$. По построению множество общих нулей функций

$$q_i\big(z^1,z^2\big)=\big\langle r_i,\,y\big(\cdot\,;\,z^1,{\scriptstyle T}\big)-y\big(\cdot\,;\,z^2,{\scriptstyle T}\big)\big\rangle,\quad 0\leq i\leq 2n$$

в W совпадает с $Z=\cap_{j=1}^{\infty}Z_j$ $\big(Z_j$ — нули $\Delta\psi_j$ в $W\big)$. В силу полноты $\big\{k_i,\,i\geq 1\big\}$ любые неравные на $[0,{\scriptstyle T}]$ функции $y\big(\cdot\,;\,x^1,{\scriptstyle T}\big)\neq$ $\neq y\big(\cdot\,;\,x^2,{\scriptstyle T}\big)$, $x^j\in U_{\scriptscriptstyle T}$, имеют различный набор проекций:

$$\big\{\big\langle r_i,\,y\big(\cdot\,;\,x^1,{\scriptstyle T}\big)\big\rangle\big\}\neq\big\{\big\langle r_i,\,y\big(\cdot\,;\,x^2,{\scriptstyle T}\big)\big\rangle\big\},\quad 0\leq i\leq 2n\,.$$

Из $y(\cdot\,;\,x,{\scriptstyle T})\leftrightarrow\big(\varphi_0(x),\ldots,\varphi_{2n}(x)\big)$, $x\in U_{\scriptscriptstyle T}$, $\varphi_i(x)=\big\langle r_i,\,y(\cdot\,;\,x,{\scriptstyle T})\big\rangle$, следует базисность набора φ_i в $\Phi(U_{\scriptscriptstyle T})$. Удачных наборов $\{r_j\}$ бесконечно много: имеется определенный произвол в выборе $\{k_i\}$ и коэффициентов для r_j. Допустимы и разрывные k_i, если доказывать сходимость рядов для r_j в L_2.

Наблюдаемость пары (f,g) в $M\subseteq U_{\scriptscriptstyle T}$ $\big(y(\cdot\,;\,x,{\scriptstyle T})\leftrightarrow x\in M\big)$ характеризуется тем, что для полной в L_2 $\big($на $Y=\{\,y(\cdot)\}\big)$ системы $\{k_i,\,i\geq 1\}$ множество общих нулей функций $\Delta\psi_i\big(x^1,x^2\big)$ в $M\times M$

совпадает с диагональю $\{(x,x)\,|\,x \in M\}$. Для базисных $r_j(\cdot)$ вектор $x(T) \in M$ однозначно определяется по набору $2n+1$ проекций $\mu_i = \langle r_i, y\rangle$. Но даже если (f,g) не наблюдаема, поиск базиса $\Phi(M)$ для заданной подобласти $M \subseteq U_T$ имеет важное прикладное значение. В частности, для формирования управления $u\big(x(t)\big)$ в регулируемых системах по предыстории измерений на $[t-T,t]$ нет необходимости в промежуточном восстановлении полного фазового вектора $x(t)$, достаточно наблюдения непосредственно функции $u(x)$. Если какая-либо из базисных весовых $k(\cdot)$ не удовлетворяет заданным ограничениям реализации $|k(t)| \le \overline{k} = \mathrm{const}$, то вместо нее следует взять $\alpha k(\cdot)$ с достаточно малым множителем α. Такие операции не меняют свойства базисности, важны “проекции на направления”.

В заключение пункта остановимся на некоторых обобщениях. В случае многомерных измерений $g : U \to \mathbf{R}^m$, $m \ge 1$, теоремы $1, 2$ останутся без существенных изменений. Их можно переформулировать и в терминах задачи прогнозирования: по $y(\cdot)$ $(t \in \Theta)$ определять $x = x(T) \in U_T$ $\big(\varphi\big(x(T)\big)\big)$. В стационарных системах в силу теоремы единственности для аналитических функций $y|_{[0,\theta]} \leftrightarrow y|_{[0,T]}$ и прогнозируемость эквивалентна наблюдаемости (вычислительные аспекты пока не затрагиваем). В нестационарном случае $f = f(t,x)$, $g = g(t,x)$, когда требования гладкости по t могут быть значительно ослаблены, прогнозируемость влечет наблюдаемость, но не наоборот. Для допустимых весовых функций в интегральных операторах (3) следует полагать $k(t,y) = 0$, $t > \theta$. В доказательствах по существу использовалась только вещественная аналитичность функций $\langle\, k,\, y(\cdot\,;\, x, T)\,\rangle$ по данным Коши $x = x(T) \in U_T$. Для удобства считаем $\theta \le T$, и тогда наблюдаемости будет соответствовать частный случай прогнозируемости $(\theta = T)$.

Перейдем к рассмотрению нестационарной системы наблюдения

$$\dot{x} = f(t,x), \quad y = g(t,x), \tag{6}$$

заданной в области $\Omega = (t_1,t_2) \times U$, $[0,T] \subset (t_1,t_2)$. Вектор-функции f, g предполагаем непрерывными по совокупности переменных в Ω и вещественными аналитическими по x в U при каждом фиксированном $t \in (t_1,t_2)$. Считаем также, что выполнены следующие условия:

$$f = f^c\big|_\Omega, \quad g = g^c\big|_\Omega, \quad f^c(t,\cdot) \in C^\omega(U^c), \quad g^c(t,\cdot) \in C^\omega(U^c),$$

$$f^c \in C\big((t_1,t_2)\times U^c,\, \mathbf{C}^n\big), \quad g^c \in C\big((t_1,t_2)\times U^c,\, \mathbf{C}^m\big).$$

Область U^c — окрестность U в $\mathbf{C}^n$. Это обеспечивает существование, единственность решения задачи Коши и аналитичность по начальным даным [15]. Пусть для подобласти $U_T \subseteq U$ решения $x(\cdot\,;x,T)$, $x = x(T) \in U_T$, продолжимы на $[0,T]$. Тогда $\forall\, k(\cdot) \in L_2^m = L_2^m[0,T]$ функция $\psi(x) = \big\langle k,\, y(\cdot\,;x,T)\big\rangle$ вещественная аналитическая в U_T $\big($и аналитическая в области U_T^c — достаточно малой окрестности U_T в $\mathbf{C}^n\big)$. Последнее свойство можно принять в качестве исходного основного предположения, сказанное выше — достаточные условия.

Пусть $\Phi_*(M)$ — множество прогнозируемых в $M \subseteq U_T$ функций:

$$\varphi \in \Phi_*(M) \Leftrightarrow \varphi(x) = \Lambda\big(y(\cdot\,;x,T)\big), \quad x\in M,\ y:\Theta\to\mathbf{R}^m.$$

Определение 2 базисности остается без изменений. В последующих за ним рассуждениях считаем $y(\cdot) \in Y_* = \big\{y:\Theta\to\mathbf{R}^m \big|\, x(T)\in U_T\big\}$. Класс допустимых весовых $k(\cdot)$ прежний — кусочно непрерывные на отрезке $[0,\theta]$. При необходимости доопределяем их нулем на $(\theta,T]$.

Теорема 3. *Для нестационарной пары (f,g) и любого M с компактным замыканием в U_T из произвольной полной* в $L_2^m(\Theta)$ (на Y_*) *системы допустимых вектор-функций $\big\{k_i,\, i\ge 1\big\}$ можно выделить такие $k_{i_\nu}(\cdot)$, что функции $\varphi_\nu(x) = \big\langle k_{i_\nu},\, y(\cdot\,;x,T)\big\rangle$ $\big(x\in U_T,\ 1\le\nu\le p\big)$ образуют базис множества $\Phi_*(M)$. Без ограничения $k(\cdot)\in\big\{k_i\big\}$ можно добиться $M = U_T,\ p = 2n+1$.*

В теоремах 1—3 можно считать $M = U_T$, если известно, что область U_T ограничена и решения с $x(T)\in\widehat{U}$ продолжимы на отрезок времени $[0,T]$. Подобласть $\widehat{U}\subseteq U$ содержит замыкание $\mathrm{cl}\,U_T$.

Изложенные результаты интерпретируются как конечномерное представление Y (Y_*) в $\mathbf{R}^p$. Здесь следует иметь в виду, что операторы "вложения" имеют специальный вид $\big($проекции $y(\cdot)$ в $L_2^m\big)$ и не предполагается локальная невырожденность (1), (6) (локальная наблюдаемость в U_T по линейному приближению). Образно говоря, "якобиан может вырождаться". В случае (6) выход $y(\cdot)$ может быть и недифференцируемой вектор-функцией по t.

3. Сопряженная задача управления

Результаты п. 2 позволяют перейти к исследованию интегральных операторов (3), не опасаясь "их неполной информативности". Вместо операторной связи $\varphi(\cdot)$ и $k(\cdot,\cdot)$ необходимо уравнение, удобное в конструктивном плане.

Чтобы используемая ниже техника по аналогии воспринималась естественной, кратко изложим некоторые общеизвестные результаты линейной теории.

3.1. Необходимые сведения из линейной теории. Пусть $\dot{x}(t) = F(t)\,x(t),\ y(t) = G(t)\,x(t)$. Элементы матриц F, G непрерывны на $[0, \tau]$. Определение $x(\tau)$ эквивалентно определению набора проекций $h'x(\tau)$, когда h "пробегает" базис $\mathbf{R}^n$. Кроме того, не всегда нужен полный фазовый вектор — например, часть компонент измеряется. Поэтому для фиксированного вектора $h \in \mathbf{R}^n$ рассмотрим задачу построения оператора восстановления проекции: $h'x_\tau = I\big(y(\,\cdot\,;\ \tau, x_\tau)\big)$. При каких ограничениях восстановление возможно? Если оператор I существует, то проекция $\varphi(x) = h'x$ называется *наблюдаемой* или *прогнозируемой* (когда информация $y(t)$ известна на $\Theta = [0,\vartheta],\ \vartheta < \tau$). Как среди решений задачи выбрать подходящий с вычислительной точки зрения оператор I? Обозначим через $\mathcal{Y} = \{\,y(\,\cdot\,;\ \tau, x_\tau)\,|\,x_\tau \in \mathbf{R}^n\}$ множество допустимых (возможных) измерений:

$$y(t) = \Psi(t)\,x_\tau = G(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\,x_\tau, \quad \mathcal{Y} \subset L_2^m[0,T],\ \dim\mathcal{Y} \le n,$$

где $\dot{\Phi} = F\Phi,\ \Phi(0) = E_n$. Канонический базис $\mathbf{R}^n$ при линейном отображении $L : x_\tau \mapsto y(\cdot)$ переходит в столбцы матрицы $\Psi(\cdot)$. Если столбцы линейно независимы, т. е. $G(t)\Phi(t)\,c = 0$ $\forall\, t \in [0,\tau]\,\big(\Theta\big) \Rightarrow c = 0 \in \mathbf{R}^n$, то $\dim\mathcal{Y} = \dim\mathcal{L}(\Psi(\cdot)) = n$ и линейное отображение L обратимо — имеет место полная наблюдаемость (прогнозируемость). Символ $\mathcal{L}$ обозначает линейную оболочку столбцов. Вектор однозначно определяется проекциями на базисные элементы. Поэтому имеет место взаимно-однозначное соответствие

$$\gamma \leftrightarrow y(\cdot), \quad \gamma = \int_0^T \Psi'(\tau)\,y(\tau)\,d\tau = \Gamma\,x_\tau, \quad \Gamma = \big\langle \Psi, \Psi \big\rangle.$$

Функционал, восстанавливающий проекцию $h'x_\tau$ по $y(\cdot)$, существует только в случае $h \in \mathcal{L}(\Gamma)$. Если выполняется

$h'x_T = I\big(y(\cdot)\big)$, то I линеен на $\mathcal{Y}$ и представи́м в интегральной форме (скалярным произведением $\langle k, y\rangle_{L_2}$) в силу

$$I\big(\alpha\, y(\cdot\,;\, x_T^1) + \beta\, y(\cdot\,;\, x_T^2)\big) = I\big(\, y(\cdot\,;\, \alpha\, x_T^1 + \beta\, x_T^2)\big) = h'\big(\alpha\, x_T^1 + \beta\, x_T^2\big) =$$

$$= \alpha\, h' x_T^1 + \beta\, h' x_T^2 = \alpha\, I\big(\, y(\cdot\,;\, x_T^1)\big) + \beta\, I\big(\, y(\cdot\,;\, x_T^2)\big).$$

Все, что можно узнать о x_T по $y(\cdot)$, — функции от проекций $h'x_T$ на столбцы матрицы Грама Γ. Напомним, что речь идет об операции: $\forall\, x_T \in \mathbf{R}^n$.

В силу конечномерности любой линейный функционал на $\mathcal{Y}$ представи́м в форме $\langle\, a, y\,\rangle_{L_2}$. В частности, можно численно неустойчивую операцию дифференцирования $\dot{y}(s)$ заменить интегральным оператором на $\mathcal{Y}$.

Если оператор восстановления $\varphi(\,x_T) = h'x_T = I\big(\,y(\cdot)\big)$ существует, то его можно и целесообразно из вычислительных соображений искать в форме:

$$h'x_T = \int_0^T k'(\tau)\, y(\tau)\, d\tau \;\; \forall\, x_T \in \mathbf{R}^n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h = \Phi^{-1\prime}(T) \int_o^T \Phi'(\tau)\, G'(\tau)\, k(\tau)\, d\tau. \tag{7}$$

Уравнение (7) — функциональное относительно $k(\cdot)$. Руководствуясь идеей переноса, сведем проблему к исследованию “поточечного” уравнения. Для этого на отрезке времени $[0, T]$ определим вектор-функцию

$$V(t) = \Phi^{-1\prime}(t) \int_0^t \Phi'(\tau)\, G'(\tau)\, k(\tau)\, d\tau, \tag{8}$$

$$\vartheta < T \Rightarrow\; k(\tau) = 0,\;\; \tau \in (\vartheta, T].$$

Граничные условия очевидны: $V(0) = 0$, $V(T) = h$. Для вывода уравнения продифференцируем (8) с учетом $\Phi^{-1}\Phi = E_n \Rightarrow d\Phi^{-1}/dt = -\Phi^{-1}A$:

$$\dot{V}(t) = -F'(t)\, V(t) + G'(t)\, k(t). \tag{9}$$

Уравнение (9) интерпретируется как сопряженная система управления. Требуется перевести фазовый вектор V из нуля в h за время T. Для задачи прогнозирования — при ограничении на управление

$k(\tau) = 0$, $\tau > \vartheta$. В терминах теории управления множество всех h, для которых наблюдаемы (прогнозируемы) проекции $h' x_{\scriptscriptstyle T}$, совпадает с множеством достижимости $\mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T} = \{V(\mathrm{T})\}$.

З а м е ч а н и е 2. Прокомментируем изложенные известные результаты линейной теории на языке функционального анализа. Определим оператор $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \to \mathcal{Y}$:

$$\mathcal{A}\, x_{\scriptscriptstyle T} = y(\,\cdot\,;\ \mathrm{T}, x_{\scriptscriptstyle T}) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \bigl\langle k\,, y \bigr\rangle_{L_2} = \bigl\langle k\,, \mathcal{A}\, x_{\scriptscriptstyle T} \bigr\rangle_{L_2} = \bigl\langle h\,, x_{\scriptscriptstyle T} \bigr\rangle_{\mathbf{R}^n}, \ h = V(\mathrm{T}).$$

С учетом включения $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$ достаточно ограничиться $k(\cdot) \in \mathcal{Y}$. По определению $V(\mathrm{T}) = \mathcal{A}^* k$, где $\mathcal{A}^* : \mathcal{Y} \to \mathbf{R}^n$ — сопряженный оператор. Можно считать $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \to L_2^m$, $\mathcal{A}^* : L_2^m \to \mathbf{R}^n$. Для определения значения $\mathcal{A}^* k$ нужно проинтегрировать (численно) на $[0,\mathrm{T}]$ сопряженную систему управления (9) или воспользоваться интегральным представлением (7). Образ $\mathcal{A}^* L_2^m = \mathcal{A}^* \mathcal{Y}$ совпадает с $\mathcal{L}(\Gamma)$, линейной оболочкой столбцов матрицы $\Gamma = \langle\, \Psi, \Psi \,\rangle$, которая в силу (7) является матрицей оператора $\mathcal{A}^* \mathcal{A} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$: $h = \mathcal{A}^* \mathcal{A}\, x_{\scriptscriptstyle T} = \Gamma\, x_{\scriptscriptstyle T}$.

Этой общей идее использования сопряженных операторов, реализация которой в линейной теории наблюдения и управления называется принципом двойственности, и будем следовать в нелинейном случае.

3.2. Нелинейный случай. Рассмотрим в области $\Omega = (t_1, t_2) \times U$ систему наблюдения (6) и пока ослабим требования: f, g, f_x, $g_x \in C(\Omega)$. Поскольку отрезок $[0,\mathrm{T}]$ и область $U_{\scriptscriptstyle T} = \{x(\mathrm{T})\}$ фиксированы, то последующие построения достаточно проводить на пучках

$$W = \bigl\{(t,x) \bigm| t \in [0,\mathrm{T}],\ x \in x\bigl(t\,;\, U_{\scriptscriptstyle T}, \mathrm{T}\bigr)\bigr\}, \quad W_g = \bigl\{\bigl(t, y(t)\bigr) \bigm| t \in [0,\mathrm{T}]\bigr\}.$$

Выберем в области $Q \supset W_g$ весовую функцию обработки измерений $k(\cdot,\cdot)$: $Q = Q(k) \subset \mathbf{R}^{m+1}$, $k\,, k_y \in C(Q)$. Тогда функция

$$v(t,x) = \int_0^t k\bigl(\tau, y(\tau;\, x, t)\bigr)\, d\tau \tag{10}$$

будет класса $C^1(W)$ в силу гладкости решений дифференциальных уравнений по начальным данным $(t_0, x_0) = (t, x) \in W$.

Запись $v \in C^1(W)$ подразумевает, что $v(\cdot,\cdot)$ продолжается в некоторую область $\widetilde{W} \supset W$ и $v \in C^1\big(\widetilde{W}\big)$. В качестве $\widetilde{W}$ можно взять объединение интегральных кривых $\big(t, x(t)\big)$, соответствующих непродолжаемым решениям $x\big(\cdot\,;\,x(T), T\big)$ $\big(x(T) \in U_T\big)$, пока $\big(t, y(t)\big)$ находятся в пределах области Q определения $k(\cdot,\cdot)$. Поэтому если ниже значения t и ограничены отрезком наблюдения $[0, T]$, то с символами производной v_t в точках $(0, x)$, (T, x) не должно возникать недоразумений. Их можно считать односторонними производными.

Теорема 4. *Функция $v(\cdot,\cdot)$ является единственным гладким решением линейного уравнения первого порядка*

$$v_t(t,x) + v_x(t,x)\cdot f(t,x) = k\big(t, g(t,x)\big), \quad (t,x) \in W, \qquad (11)$$

с нулевыми начальными данными $v(0,x) = 0$, $x \in U_0 = x\big(0\,;\,U_T, T\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную точку $(t,x) \in W$ и решение $x(\tau)$ с начальными данными $x(t) = x$ $(\tau \in (-\varepsilon, t+\varepsilon)$, $\varepsilon = \varepsilon(t,x) > 0)$. Вычислим производную по времени от v на решении (D — символ дифференцирования):

$$L_f\, v(t,x) = D_\tau\, v\big(\tau, x(\tau)\big)\Big|_{\tau=t} = v_t(t,x) + v_x(t,x)\cdot f(t,x).$$

С другой стороны (с учетом конкретного представления (10)):

$$v\big(\tau, x(\tau)\big) = \int_0^\tau k\big(s, y(s;\,x(\tau),\tau)\big)\,ds = \int_0^\tau k\big(s, y(s;\,x(0),0)\big)\,ds =$$

$$= \int_0^\tau k\big(s, y(s;\,x(t),t)\big)\,ds, \quad D_\tau\, v\big(\tau, x(\tau)\big)\Big|_{\tau=t} =$$

$$= k\big(t, y(t;\,x,t)\big) = k\big(t, g(t,x)\big).$$

Единственность — от противного. Для разности $\bar v$ двух решений получаем уравнение (11) с нулевой правой частью (уравнение первого интеграла). Значит, $\bar v\big(t, x(t)\big) \equiv \mathrm{const}$. Множество W состоит из интегральных кривых на $[0,T]$, $\bar v(0,\cdot) = 0$. Поэтому $\bar v(t,x) = 0$, $(t,x) \in W$.

Смысл функции (10) и уравнения (11) состоит в следующем. Если положить $t = T$ в определении (10), то получим интегральный оператор в правой части (3). Если он должен восстанавливать значения $\varphi(x(T))$, то к нулевым начальным данным для уравнения (11) добавляется условие $v(T,x)=\varphi(x)$, $x\in U_T$. Поэтому (11) можно трактовать как уравнение переноса фазовой точки $v(t,\cdot)$ из нуля в φ за время T. Если $k(\cdot,\cdot)$ $\big(k\,, k_y \in C(Q)\big)$ решает задачу (3), то для $v(\cdot,\cdot)$ выполнено (11) и краевые условия $v(0,x)=0$, $x\in U_0 = x\big(0\,; U_T, T\big)$, $v(T,x)=\varphi(x)$, $x\in U_T$. Обратно, если выбор функции $k(\cdot,\cdot)$ приводит к решению граничной задачи, то подставляя в (11) вместо x любое решение $x\big(t\,; x(T), T\big)$, $x(T)\in U_T$ и интегрируя полученное тождество по t на отрезке $[0,T]$ $\big($слева $\dot v\big(t,x(t)\big)\,\big)$, получаем (3). Итак, задача построения интегральных операторов (3) восстановления значений $\varphi\big(x(T)\big)$ эквивалентна граничной задаче $v(0,\cdot)=0$, $v(T,\cdot)=\varphi$. Уравнение (11) линейно по паре $(k\,,v)$. Здесь уместны аналогии с методами функций Ляпунова и динамическим программированием Беллмана.

З а м е ч а н и е 3. Уравнение (11) достаточно рассматривать лишь на множестве W, состоящем из объединения возможных интегральных кривых $\big(\,x(T)\in U_T\big)$. Но при достаточно адекватном моделировании обычно не возникает проблем с продолжимостью: решения $x(\cdot\,; x,t)$ с начальными данными $(t,x)\in[0,T]\times\widetilde U$ $\big(\,U_T\subseteq\widetilde U\subseteq U\,\big)$ продолжимы на $[0,t]$ и возможные фазовые кривые с $x(T)\in U_T$ не покидают известную область $\widetilde U$. Тогда в силу определения (10) $v\in C^1\big([0,T]\times\widetilde U\big)$ и уравнение (11) можно рассматривать на множестве вида прямого произведения $[0,T]\times\widetilde U$, что удобнее. Область Q определения $k(\cdot,\cdot)$ должна содержать $\big\{\big(t,g(t,x)\big)\,\big|\,t\in[0,T],\ x\in\widetilde U\big\}$. Для задачи прогноза $k(\cdot,\cdot)$ $\big(\,k\,,k_y\in C(Q)\,\big)$ подвергнем усечению $k(t,\cdot)=0$, $t>\theta$. Кроме того, для линейных $k(t,y)=k'(t)\,y$ допускаем конечное число разрывов первого рода вектор-функции $k(t)$. Непрерывность $v(\cdot,\cdot)$ в (10) сохранится, а (11) достаточно рассматривать вне конечного числа сечений $t=\theta$, $t=t_j$. Подобные уточнения для допустимых $k(\cdot,\cdot)$ будем опускать.

Остановимся подробнее на интерпретации (11) как линейной системы управления. Для этого удобно перейти к операторной форме:

$$\dot V(t) = -A(t)V(t) + B(t)K(t), \quad V(0)=0, \tag{12}$$

$$V(t)=v(t,\cdot) : x(t\,;U_T,T)\to\mathbf{R}^1, \dot V(t) = v_t(t,\cdot),$$

$$A(t)V(t) = v_x(t,\cdot)f(t,\cdot),\ K(t)=k(t,\cdot),\ \ B(t)K(t)=k\big(t,g(t,\cdot)\big).$$

Если нет проблем с продолжимостью (замечание выше), то (12) — линейная система управления "стандартного вида" в фазовом пространстве $C^1\big(\widetilde{U}\big)$. В противном случае область определения фазового вектора $v(t,\cdot)$ (как функции x) может изменяться при $t \in [0,T]$. Для выполнения (3) выбором $K(\cdot)$ следует решить задачу $V(T) = \varphi \ \big(x \in U_T,\, x \in \widetilde{U}\big)$. Таким образом, нас интересует множество достижимости из нуля $\mathcal{D}_T = \{V(T) = v(T,\cdot)\} \subseteq C^1(U_T)$. По построению $\mathcal{D}_T \subset \Phi(U_T)$. Ограничение $|k(t,y)| \le \overline{k}$ не рассматриваем. В приложениях фазовые траектории обычно расположены в ограниченной области и при необходимости можно использовать αk с малой константой α, деля затем результат интегрирования в (3) на α.

Управление системами с бесконечномерным фазовым пространством — популярная тема в общей теории систем и функциональном анализе. В данном случае имеется следующая специфика. Излишне исследовать полную управляемость (или ε-управляемость) бесконечномерной системы (12): для наблюдаемости пары (f,g) достаточно наличия в множестве достижимости $\mathcal{D}_T$ таких $w_i : U_T \to \mathbf{R}^1$, что $\big(w_1(x),\ldots,w_p(x)\big) \leftrightarrow x \in U_T$, $x = H\big(w_1(x),\ldots,w_p(x)\big)$. Если требуется определять лишь значения заданной функции $\varphi : U_T \to \mathbf{R}^1$ $\big(\varphi(x) = \Lambda\big(y(\cdot\,;x,T)\big)\big)$, то достаточно установить либо непосредственно включение $\varphi \in \mathcal{D}_T$, либо зависимость $\varphi = H_\varphi(w_1,\ldots,w_p)$ в области U_T и применять оператор $\varphi\big(x(T)\big) = H_\varphi(\mu_1,\ldots,\mu_p)$, где μ_i вычисляются как интегралы от функций $k_i\big(\tau,y(\tau)\big)$ по $\tau \in [0,T]$.

В линейном случае $f = F(t)\,x$, $y = G(t)\,x$, $k = k'(t)\,y$ наблюдаемые проекции $h'x(T)$ $\big(U_T = \mathbf{R}^n\big)$ описываются множеством $\big\{h = V(T)\big\}$ в силу (9), т. е. линейной оболочкой $\mathcal{L}$ базисных $V_i(T)$, $1 \le i \le p$, $p \le n$. Управляемость (9) означает $\mathcal{L} = \mathbf{R}^n$, т. е. $\big\{\,V_i'(T)\,x,\ 1 \le i \le n\,\big\} \leftrightarrow x \in U_T$ $\big(\mathbf{R}^n\big)$, $p = n$. При управлении (12) как сопряженной системой к (f,g) нас интересуют "нелинейные проекции" $\varphi\big(x(T)\big) = v\big(T,x(T)\big)$ и "полнота" не линейной, а функциональной оболочки наборов элементов множества достижимости. Как линейное пространство $\mathcal{D}_T$ бесконечномерно, за исключением вырожденных случаев (например, f — линейна, g — полиномиальна). Можно доказать, что даже если ограничиться линейными $k(t,y) = k'(t)\,y$, то $\mathcal{D}_T$ конечномерно лишь в случае конечномерности линейной оболочки $\mathcal{L}\big\{\,y(\cdot\,;x,T)\,\big|\,x \in U_T\big\}$ (и тогда

$\dim \mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T} = \dim \mathcal{L}$). Эти соображения оправдывают для нелинейной задачи наблюдения (но линейной задачи управления (12)) использование функциональной зависимости вместо линейной.

О п р е д е л е н и е 3. Базисом в $M \subseteq U_{\scriptscriptstyle T}$ множества достижимости сопряженной системы управления $\mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T} = \{V(\tau) = v(\tau, \cdot) : U_{\scriptscriptstyle T} \to \mathbf{R}\}$ назовем конечную совокупность $w_i \in \mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T}$, для которой $w(x) = H_w\big(w_1(x), \ldots, w_p(x)\big)$ $\forall\, x \in M$, $\forall\, w \in \mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T}$. Систему (11)((12)) считаем управляемой в подмножестве $M \subseteq U_{\scriptscriptstyle T}$, если базис w_i в M существует и $\big(w_1(x), \ldots, w_p(x)\big) \leftrightarrow x \in M$ (т. е. функциональная оболочка базисных w_i дает все пространство функций от $x \in M$).

Свойство управляемости в $M \subseteq U_{\scriptscriptstyle T}$ не зависит от выбора базиса $\mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T}$ в M. Для полной в $L_2^m\,[0,T]$ системы $\{k_i,\, i \geq 1\}$ кусочно непрерывных вектор-функций определим элементы $v_i(\tau, \cdot) \in \mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T}$, $v_i(\tau, x) = \big\langle k_i,\, y(\cdot\,;\, x, \tau)\big\rangle$. "Коэффициенты Фурье" $\langle\, k_i, y\,\rangle$ однозначно определяются по $w_\nu(x)$ в M: $v_i(\tau, x) = H_i\big(w_1(x), \ldots, w_p(x)\big)$. Следовательно, $\big(w_1(x), \ldots, w_p(x)\big) \leftrightarrow y(\cdot\,;\, x, \tau)$, $x \in M$.

Приходим к обобщению двойственности в теории управления и наблюдения на нелинейный случай. Рассмотрим сразу нестационарный случай (10) и задачу прогнозирования (задаче наблюдения соответствует $\theta = \tau$). Вернемся к указанным выше предположениям вещественной аналитичности по фазовым переменным в (10). Тогда $\forall M$ с компактным замыканием в $U_{\scriptscriptstyle T}$ из произвольной полной в $L_2^m(\Theta)$ системы кусочно непрерывных вектор-функций $\{k_i,\, i \geq 1\}$ можно выделить такие элементы $k_{i_\nu}(\cdot)$, $1 \leq \nu \leq p$, что функции $w_\nu(x) = \big\langle k_{i_\nu},\, y(\cdot\,;\, x, \tau)\big\rangle = v_{i_\nu}(\tau, x)$, $x \in U_{\scriptscriptstyle T}$, образуют базис в M множества достижимости $\mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T}$. В условиях замечания 1 это справедливо и при $M = U_{\scriptscriptstyle T}$. Если $\theta < \tau$, то всегда подразумевается $k_{i_\nu}(t) = 0$, $k(t, \cdot) = 0$, $t > \theta$. Без априорного ограничения $k(\cdot) \in \{k_i,\, i \geq 1\}$ на отрезке времени $\Theta = [0, \theta]$ можно указать семейство наборов $\{k_j(\cdot)\}$ $\big(1 \leq j \leq p,\ \ p = 2n + 1\big)$ из допустимых $k(\cdot)$, для которых соответствующие $w_j = v_j(\tau, \cdot)$ образуют базис $\mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T}$ в $M = U_{\scriptscriptstyle T}$. В компактной форме получаем следующий итог.

Теорема 5. *Множество $\Phi_*(M)$ прогнозируемых в M функций описывается как функциональная оболочка $\mathcal{H}(M) = \{H(w_1, \ldots, \ldots, w_p)\}$ какого-либо базиса w_i в M множества достижимости $\mathcal{D}_{\scriptscriptstyle T}$. В частности, можно ограничиться только линейными $k(t, y) = k'(t)\, y$ и считать $M = U_{\scriptscriptstyle T}$, $p = 2n + 1$. Сужения элементов $\mathcal{H}(U_{\scriptscriptstyle T})$ на M образуют $\Phi_*(M)$. Пара (f, g) прогнозируема* (*наблюдаема при* $\theta = \tau$) *в* $M \subseteq U_\tau$ *тогда и только тогда, когда сопряженная система* (11) *управляема в* M.

В стационарном линейном случае имеем удобное описание множества достижимости $\mathcal{D}_\tau$ как линейной оболочки столбцов матрицы управляемости $\mathcal{K} = \big(G', \dots, F'^{n-1}G'\big)$. Для бесконечномерной сопряженной системы (12) все сложнее. Пусть для простоты $f = f(x)$, $g = g(x)$, $m = 1$, $\theta = \tau$, $k(t,y) = k(t)\,y$. Рассмотрим последовательные производные

$$L_f^0\,g(x) = g(x),\ L_f^{i+1}g(x) = \big(L_f^i\,g(x)\big)_x \cdot f(x), \quad x \in U_\tau\ (x \in U).$$

Производные выхода $y^{(i)}(t)$ равны $L_f^i g\big(x(t)\big)$. Теоретически удобно исследовать систему n уравнений $L_f^i g(x) = y^{(i)}(\tau)$ с точки зрения разрешимости относительно $x \in U_\tau$. Применение критериев инъективности отображений из $M \subseteq \mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$ приводит к достаточным условиям наблюдаемости в M. Но последовательное дифференцирование измерений практически неприемлемо. В этом смысле операторы (3) корректны: каждая операция интегрирования производится независимо от другой и происходит сглаживание измерений. В приложениях обычно компоненты вектор-функций f, g являются суперпозициями элементарных функций — тогда и $L_f^i\,g$ таковые. В операторных терминах (12) производные $L_f^i\,g = A^iB$ $\big(\,A = D_x(\cdot)\,f,\ B = g,\ BK(t) = k(t)\,g\,\big)$ являются аналогом столбцов матрицы управляемости: для $(f,g) = (F,G)$ имеем $L_f^i\,g = GF^ix$, $F'^{j-1}G'$ — j-й столбец $\mathcal{K}$.

З а м е ч а н и е 4. Используя формулу Тейлора, при достаточно малом T получим представление элементов $\mathcal{D}_\tau$ в виде ряда: $L_i = L_f^i\,g$, $v(\tau,x) = c_0 + c_1L_1(x) + c_2L_2(x) + \dots$, $c_i = \big\langle k, (\tau - \tau)^i\big\rangle/i!\,$. Имеем дело со степенной проблемой моментов. Поэтому в общем случае базисные элементы $A^iB = L_f^i\,g$ (столбцы матрицы управляемости) сами не принадлежат $\mathcal{D}_\tau$. Дифференцирование выхода нельзя заменить интегральными операторами. Конечное разложение $v(\tau,x)$ по $L_i(x)$ возможно, но коэффициенты уже будут функциями x. Множество $\mathcal{D}_\tau$ зависит от τ и ограничение $k(t) = 0,\ t > \theta$, для задачи прогнозирования сужает $\mathcal{D}_\tau$ (в отличие от линейной модели).

3.3. Идеальная наблюдаемость. Кратко остановимся на проблеме наблюдения систем с возмущениями. Рассмотрим сопряженную систему (11) на множестве $[0,\tau] \times \widetilde{U}$. Решения $x(\cdot\,; x, t)$ с начальными данными $(t,x)\in[0,T]\times\widetilde U$ продолжимы на $[0,t]$ и возможные фазовые кривые $\big(\,x(T)\in U_T\subseteq\widetilde U\,\big)$ не покидают известную область $\widetilde U$ (замечание 3). Пусть теперь уравнения движения в модели (10) подвержены неконтролируемым возмущениям:

$$\dot x=f(t,x)+\sum\nolimits_{i=1}^{r}\xi_i(t)\,h^i(t,x),\quad h^i,h^i_x\in C(\Omega).\tag{13}$$

Функции $\xi_i(t)$ неизвестны, кусочно непрерывны, $|\xi_i(t)|\le\bar\xi=\mathrm{const}$. Пусть выбором допустимой функции $k(\cdot,\cdot)$ в (11) решена задача (3) $\big(\,v(T,x)=\varphi(x),\ x\in U_T\big(\widetilde U\big)\,\big)$ и дополнительно выполнено

$$v_x(t,x)\cdot h^i(t,x)=0,\quad (t,x)\in[0,T]\times\widetilde U,\quad 1\le i\le r.\tag{14}$$

Тогда в правой части сопряженной системы (11) можно f заменить на правую часть (13). Результат формальной подстановки обозначим через $(11)_\xi$. Рассмотрим любое возмущенное решение $x\big(\cdot\,;\,x(T),T,\xi\big)$ с начальными данными $x(T)\in U_T$, определенное на $[0,T]$ и с фазовой кривой в пределах множества $\widetilde U$. Подставим его вместо x в $(11)_\xi$ и проинтегрируем тождество по $t\in[0,T]$:

$$\varphi\big(x(T)\big)=\int_0^T k\big(\tau,y(\tau\,;\,x(T),T,\xi)\big)\,d\tau,\quad x(T)\in U_T,\ x(\tau)\in\widetilde U.$$

По аналогии с линейным случаем [4] такой оператор назовем оператором идеального наблюдения: весовая функция $k(\cdot,\cdot)$ не зависит от реализации возмущений $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_r)'$, их учет проводится косвенно посредством измерений $y(t)=g\big(t,x(t)\big)$. Можно контролировать компоненту $\varphi\big(x(T)\big)$ фазового вектора при неизвестных возмущениях, но с заданной неопределенностью $x(T)\in U_T$. В условиях продолжимости по t это можно делать периодически.

В операторной форме (12) условие (14) принимает вид линейных фазовых ограничений в процессе движения фазовой точки:

$$P(t)V(t)=0:\quad v_x(t,\cdot)\,H(t,\cdot)=0,\ H=\big(h^1,\dots,h^r\big).$$

Если направления возмущений h^i фиксированы, то получаем задачу управления не только конечным состоянием $v(T,\cdot)=\varphi$, но и градиентом $v_x(t,\cdot)$. Обеспечив малость PV в подходящей норме, получим малочувствительный к возмущениям интегральный оператор наблюдения. Обратно, можно решать невозмущенную задачу и тогда условие (14) даст описание инвариантных направлений h^i. Важная характеристика пары (φ, k).

4. Схемы методов приближений

Остановимся вначале на технике степенных рядов. Рассмотрим в области $\Omega = (t_1, t_2) \times U$ модель наблюдения (14) в указанных предположениях аналитичности по фазовым переменным. Будем строить ряды по отклонениям от некоторого опорного движения, которое считаем нулевым (достигается заменой переменных): $f(t,0) = 0,\ g(t,0) = 0,\ 0 \in U_{_T} \subseteq U$. Ограничимся пока линейными допустимыми весовыми функциями $k(t,y) = k'(t)\,y$. В некоторой окрестности нуля Q при $t \in [0,{\scriptstyle T}]$ функции $v(t,x),\ f(t,x),\ g(t,x)$ разлагаются в степенные ряды по x. Коэффициенты непрерывны на $[0,{\scriptstyle T}]$, гладкость коэффициентов для $v(t,x)$ может нарушаться только в точках разрыва (первого рода) $k(t)$. Сходимость равномерная по $t \in [0,{\scriptstyle T}]$.

Приравняем слева и справа в сопряженной системе (11) однородные полиномы по x одинаковой степени (верхний индекс $p \geq 1$):

$$v_t^{(p)}(t,x) + \sum\nolimits_{i=1}^{p} v_x^{(i)}(t,x) \cdot f^{(p-i+1)}(t,x) = k'(t)\, g^{(p)}(t,x), \qquad (15)$$

$v^{(p)}(0,x) = 0,\ \ x \in Q,\ \ t \in [0,{\scriptstyle T}]$. Однородному полиному $w^{(p)}(\cdot)$ степени p соответствует единственная симметрическая p-линейная форма $w^{(p)}(\cdot,\ldots,\cdot)$ из условия $w^{(p)}(x) \equiv w^{(p)}(x,\ldots,x),\ x \in \mathbf{R}^n$ [17]. Например, полиному $v^{(2)}(x) = x'Px$ соответствует билинейная форма $v^{(2)}(x,z) = v^{(2)}(z,x) = x'(P+P')z/2$. В терминах симметрических полилинейных форм (t считаем параметром) уравнения (15) перепишутся в виде

$$v_t^{(p)}(t,x,\ldots,x) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{i} v^{(i)}\big(t,x,\ldots,f^{(p-i+1)}(t,x,\ldots,x),\ldots,x\big) =$$

$$= k'(t)\, g^{(p)}(t,x,\ldots,x).$$

В силу симметричности можно приравнять коэффициенты при одинаковых лексикографически упорядоченных мономах $x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_p}$:

$$\dot{V}^{(p)} + \sum\nolimits_{i=1}^{p}\Big(\sum\nolimits_{j=1}^{i} E \otimes \ldots \otimes F^{(p-i+1)\prime} \otimes \ldots \otimes E\Big) \cdot V^{(i)} = G^{(p)\prime}\, k.$$

Индекс j означает порядковый номер $F^{(p-i+1)\prime}(t)$ в последовательности i произведений $\otimes$. Символ $\otimes$ обозначает прямое (кронекерово, тензорное) [16] произведение матриц: у $A\otimes B$ на месте элементов a_{ij} матрицы A стоят блоки $a_{ij}B$. Набор индексов $(i_1,\ldots,i_p)$ лексикографически предшествует $(j_1,\ldots,j_p)$, если положительна первая из ненулевых разностей $j_1-i_1,\ldots,j_p-i_p$. Через E обозначена единичная матрица $n\times n$, $\;X^{(1)}=x,\;\; X^{(s)}=x\otimes\ldots\otimes x$,

$$V^{(s)\prime}(t)X^{(s)}=v^{(s)}(t,x,\ldots,x)=v^{(s)}(t,x),$$
$$G^{(s)}(t)X^{(s)}=g^{(s)}(t,x,\ldots,x)=g^{(s)}(t,x),$$
$$F^{(s)}(t)X^{(s)}=f^{(s)}(t,x,\ldots,x)=f^{(s)}(t,x).$$

Для объединенного вектора $V=\big(V^{(1)\prime},\ldots,V^{(p)\prime},\ldots\big)'$ получаем

$$\dot V(t)=-\mathcal{F}'(t)\,V(t)+\mathcal{G}'(t)\,k(t),\quad V(0)=0, \tag{16}$$

где $\mathcal{G}=\big(G^{(1)},G^{(2)},\ldots\big)$, первые n строк верхней блочно-треугольной матрицы $\mathcal{F}(t)$ равны $\big(F^{(1)},F^{(2)},\ldots\big)$, следующие n^2 строк —

$$\big(\mathbf{0},F^{(1)}\otimes E+E\otimes F^{(1)},\ldots,F^{(p)}\otimes E+E\otimes F^{(p)},\ldots\big),\;\ldots\;.$$

Заметим, что в принятых обозначениях (f,g) запишется в виде

$$\dot X=\mathcal{F}(t)\,X,\quad y=\mathcal{G}(t)\,X,\quad X=\big(x',X^{(2)\prime},\ldots\big)'. \tag{17}$$

При домножении уравнения (16) на X скалярно получим сопряженную систему управления, $v(t,x)=V'(t)X$. Здесь полная аналогия с (1), (2) в линейном случае, только в полученных “координатных” представлениях (16), (17) матрицы $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ уже бесконечны. В стационарном случае (при наблюдении в окрестности положения равновесия) блоки $\mathcal{F}'^{i}\mathcal{G}'$ матрицы управляемости являются коэффициентами последовательных производных $L_f^i\,g(x)=\mathcal{G}\mathcal{F}^iX$.

Нелинейные функции $k(\cdot,\cdot)$ ограничим свойствами вещественной аналитичности, $k(t,0)=0$. Достаточно непрерывности по совокупности переменных и аналитичности по y в окрестности нуля (причем непрерывность по (t,y) сохраняется в $(t_1,t_2)\times P$ для $(t_1,t_2)\supset[0,T]$ и окрестности P нуля в $\mathbf{C}^m$). Тогда после приравнивания однородных полиномов и перехода к симметрическим формам получим

$$\dot V^{(p)}(t)+\Big(\sum\nolimits_{j=1}^{p}E\otimes\ldots\otimes F^{(1)\prime}(t)\otimes\ldots\otimes E\Big)\cdot V^{(p)}(t)+$$

$$+\sum_{q=1}^{p-1}\Big(\sum_{j=1}^{q} E\otimes\ldots\otimes F^{(p-q+1)\prime}\otimes\ldots\otimes E\Big)\cdot V^{(q)}(t)-$$
$$-G^{(p)\prime}\cdot k^{(1)}(t)-\big(G^{(2)\prime}\otimes G^{(1)\prime}+G^{(1)\prime}\otimes G^{(2)\prime}\big)\cdot K^{(2)}(t)-\ldots$$
$$-\sum G^{(i_1)\prime}\otimes\ldots\otimes G^{(i_{p-1})\prime}\cdot K^{(p-1)}=G^{(1)\prime}\otimes\ldots\otimes G^{(1)\prime}\cdot K^{(p)},$$

где $K^{(s)\prime}(t)\,Y^{(s)}=k^{(s)}(t,y)$, $Y^{(s)}=y\otimes\ldots\otimes y$, $i_1+\ldots+i_{p-1}=p$. Поэтому в (16) вместо $k(t)$ будет вектор $K(t)=\big(k^{(1)\prime},K^{(2)\prime},\ldots\big)'$, первые m строк $\mathcal{G}$ равны $\big(G^{(1)},G^{(2)},\ldots\big)$, следующие m^2 строк —

$$\Big(\mathbf{0},G^{(1)}\otimes G^{(1)},\,G^{(2)}\otimes G^{(1)}+G^{(1)}\otimes G^{(2)},\ldots\Big),\ \ldots,\ V'(t)X=v(t,x).$$

Для приближенных вычислений можно аппроксимировать $\varphi(x)$ ($\varphi(0)=0$) полиномом $\varphi(x)\approx\varphi^{(1)}(x)+\ldots+\varphi^{(r)}(x)=W_r'\,X_r$, $X_r=\big(x',\ldots,X^{(r)\prime}\big)'$, и решать конечномерную линейную задачу $V_r(\tau)=\big(V^{(1)\prime},\ldots,V^{(r)\prime}\big)'\approx W_r$ выбором $K_r(t)=\big(k^{(1)\prime},\ldots,K^{(r)\prime}\big)'$. Блочно-треугольная структура матриц в сопряженной системе упрощает задачу и позволяет выписать подсистему для $V_r(t)$, куда не будут входить $V^{(i)}$, $K^{(i)}$, $i>r$. Это свойство позволяет решать задачи управления $V^{(j)}(\tau)\approx W^{(j)}$ последовательно. В итоге

$$\varphi(x(\tau))\approx\int_0^T k_r\big(t,y(t)\big)\,dt,\quad k_r(t,y)=K_r'(t)\,Y_r,$$

k_r — полином степени r по y. Из-за роста размерности большие r не используются. В приложениях, когда линейное приближение вырождено, можно ограничиться $r=2$. В задаче идеального наблюдения добавятся ограничения $H_j'\,V(t)=0$, где H_j строятся по h^j так же, как и матрица $\mathcal{F}$ по f.

Вместо степенных можно использовать и другие базисные функции, ориентируясь на специфику нелинейности f, g. Аналитичность необязательна. Выберем базисные $\psi_1(x),\ldots,\psi_N(x)$ $\big(x\in\widetilde{U}$ — из замечания $\big)$. Подбираем такие функции h_j, $1\le j\le r$, чтобы $\varphi(x)$, $h_j\big(t,g(t,x)\big)$ достаточно точно приближались по базису при $x\in\widetilde{U}$:

$$\varphi(x)\approx\sum_{\nu=1}^{N} d_\nu\,\psi_\nu(x),\quad h_j\big(t,g(t,x)\big)\approx\sum_{\nu=1}^{N} b_{j\nu}(t)\,\psi_\nu(x).$$

Аналогично аппроксимируем

$$\mathcal{A}\psi_\nu=\psi_{\nu x}(x)\cdot f(t,x)\approx\sum_{\nu=1}^{N} a_{\nu\mu}(t)\,\psi_\mu(x).$$

Ищем функции k, v в форме

$$k(t,y) \approx \sum\nolimits_{j=1}^{r} k_j(t)\, h_j(y), \quad v(t,x) \approx \sum\nolimits_{\nu=1}^{N} v_\nu(t)\, \psi_\nu(x).$$

После подстановки в сопряженную систему и приравнивания коэффициентов при ψ_ν получаем конечномерную двухточечную задачу

$$\dot V(t) = -A'V(t) + B'k(t), \quad V(0) = 0, \quad V(\mathrm{T}) \approx d,$$

$$d = \{d_j\},\ V = \{v_j\},\ k = \{k_j\},\ A = \{a_{ij}\},\ B = \{b_{ij}\}.$$

В итоге

$$\varphi\big(x(\mathrm{T})\big) \approx \int_0^T \sum\nolimits_{j=1}^{r} k_j(t)\, h_j\big(t, y(t)\big)\, dt.$$

Для задачи прогнозирования следует считать $k_j(t) = 0,\ t > \theta$.

На проблему можно посмотреть и с позиций теории приближенного решения линейных граничных задач. Возьмем любую гладкую

$$v(t,x):\ v(0,x) = 0,\ v(\mathrm{T},x) = \varphi(x),\ x \in \widetilde U \quad \big(v(t,x) = t\,\varphi(x)/\mathrm{T}\,\big).$$

Добавим сумму $\alpha_1 v_1(t,x) + \ldots + \alpha_{N} v_{N}(t,x)$, $v_i(0,x) = v_i(\mathrm{T},x) = 0$ $\big($например, $v_i(t,x) = t(t-\mathrm{T})\,\theta_i(t)\,\psi_i(x)\,\big)$. Аналогично: $k(t,y) = \beta_1 k_1(t,y) + \ldots + \beta_{M} k_{M}(t,y)$. Подставляя эти выражения в распределенное сопряженное уравнение (15), получаем невязку $R(t,x\,;\,\alpha_1,\ldots,\beta_{M})$. Ее нужно минимизировать по параметрам в подходящей норме в $[0,\mathrm{T}]\times\widetilde U$. В задаче идеального наблюдения следует учесть и невязку в фазовых ограничениях. Линейность по паре $(k\,,v)$ дает возможность применять арсенал проекционных методов, развитый применительно к задачам математической физики.

Обычно измеряется часть фазовых координат: $y_i = x_i,\ i \le m$. Формально этого можно добиться заменой или добавлением переменных. В слабых предположениях гладкости в сопряженной системе справа — функция $t,\ x_1,\ldots,x_m$, и можно перейти к задаче

$$\mathcal{L}v = 0,\ v(0,\cdot) = 0,\ v(\mathrm{T},\cdot) = \varphi, \quad \mathcal{L}v = \big\{\big(v_t + v_x\cdot f\big)_{x_i}\big\}_{i=m+1}^{n}.$$

В качестве весовой функции $k(t,y_1,\ldots,y_m)$ в интегральном операторе наблюдения (3) будет выражение $L_f\, v$.

Подчеркнем, исходная задача — нелинейная обратная, а в итоге пришли к прямым методам решения линейного уравнения, хотя и распределенного (следствие построения операций наблюдения для области фазового пространства).

Указатель литературы

1. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М., Мир, 1972. 523 с.
2. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений. М., Мир, 1975. 560 с.
3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., Наука, 1968. 476 с.
4. *Никольский М. С.* Идеально наблюдаемые системы // Доклады АН СССР. 1970. Т. 191. №6. С. 1224—1227.
5. *Inoye Y.* On the observability of autonomous nonlinear systems // Journal of Math. Analysis and Applications. 1977. V. 60. №1. P. 236—247.
6. *Starkov K. E.* Number characteristics of observability for nonlinear continuous-time control systems // IMA Journal of Math. Control and Information. 2000. V. 17. P. 425—437.
7. *Козеренко К. В.* О числе замеров. Доклады АН СССР. 1987. Т. 296. № 5. С. 1069—1071.
8. *Кирин Н. Е.* К теории методов оценивания в динамических системах // Вопросы механики и процессов управления. Вып. 8. Л., ЛГУ, 1986. С. 118—125.
9. *Иванов А. П., Кирин Н. Е.* Сопряженные задачи теории управления. Л., ЛГУ, 1988. 89 с.
10. *Кирин Н. Е., Исраилов И.* Оценочные системы в задачах управления. Ташкент: ФАН, 1990. 160 с.
11. *Кирин Н. Е.* Методы оценивания и управления в динамических системах. СПб., СПбГУ, 1993. 308 с.
12. *Заика Ю. В.* Устойчивые дискретные программы наблюдений в аналитических динамических системах // Математические заметки. 1999. Т. 66. №2. С. 194—201.
13. *Чирка Е. М.* Комплексные аналитические множества. М., Наука, 1985. 270 с.
14. *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных. М., Мир, 1965. 265 с.
15. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1958. 474 с.
16. *Ланкастер П.* Теория матриц. М., Наука, 1982. 270 с.
17. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., Мир, 1971. 392 с.

А.Н. Квитко

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ*

1. Введение.

Объектом исследования является система

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{1.1}$$

где

$$x = (x^1, \ldots, x^n)^*, x \in R^n; \quad u = (u^1, \ldots, u^r)^*, u \in R^r, r \leq n,$$

$$t \in [0, 1]; \quad f \in C^3(R^n \times R^r \times R^1; R^n), \quad f = (f_1, \ldots, f_n)^*, \tag{1.2}$$

$$\|x\| < C_1. \tag{1.3}$$

Предположим дополнительно, что частные производные второго порядка от правых частей системы (1.1) по всем компонентам x, u, t ограничены $\forall\, u \in R^r$, $\forall x$, t: $||x|| < C_1$, $t \in [0, 1]$.

Пусть заданы состояния

$$x(0) = 0, \quad x(1) = x_1; \quad x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^n)^*, \quad \|x_1\| < C_1. \tag{1.4}$$

З а д а ч а. Найти функции $x(t) \in C^1[0, 1)$; $u(t) \in C^1[0, 1)$, удовлетворяющие системе (1.1) и условиям (1.3) так, чтобы были выполнены соотношения

$$x(0) = 0, \quad x(t) \to x_1 \quad \text{при} \quad t \to 1. \tag{1.5}$$

Указанную пару $x(t)$, $u(t)$ будем называть программным движением.

2. Решение задачи.

Выберем вектор $u_1 \in R^r$; $u_1 = (u_1^1, \ldots, u_1^r)^*$. Используя свойства (1.2) систему (1.1) можно записать в виде

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_1, u_1, 1)(x^j - x_1^j) +$$

---

*). Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01–01–00319).

$$+\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial f^i}{\partial u^j}(x_1,u_1,1)(u^j-u_1^j)+R_1^i(x,u,t)+R_2^i(x,u,t),\ i=1,\dots,n. \tag{2.1}$$

Здесь

$$R_1^i=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j\partial x^k}(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{t})(x^j-x_1^j)(x^k-x_1^k)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k\partial u^j}(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{t})(x^k-x_1^k)(u^j-u_1^j)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j\partial u^k}(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{t})(u^j-u_1^j)(u^k-u_1^k)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j\partial t}(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{t})(x^j-x_1^j)(t-1)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j\partial t}(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{t})(u^j-u_1^j)(t-1), \tag{2.2}$$

$$R_2^i=f_i(x_1,u_1,1)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f^i}{\partial t\partial t}\left(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{t}\right)(t-1)^2+\frac{\partial f^i}{\partial t}\left(x_1,u_1,1\right)(t-1),$$

$$\tilde{x}=x_1+\theta_i(x-x_1),\ \tilde{u}=u_1+\theta_i(u-u_1),\ \tilde{t}=1+\theta_i(t-1);$$

$$\theta_i\in(0,1),\ i=1,\dots,n. \tag{2.3}$$

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$x^i(t)=a^i(t)+x_1^i,\quad i=1,\dots,n, \tag{2.4}$$

$$u^j(t)=b^j(t)+u_1^j,\quad j=1,\dots,r. \tag{2.5}$$

После подстановки соотношений (2.4), (2.5) в систему (2.2) получим систему, которую запишем в векторном виде

$$\dot{a}=Pa+Qb+R_1(a,b,t)+R_2(a,b,t), \tag{2.6}$$

$$P=\{P_j^i\},\quad P_j^i=\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_1,u_1,1),\quad i,j=1,\dots,n;$$

$$Q = \{q_j^i\}, \quad q_j^i = \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(x_1, u_1, 1), \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, r;$$

$$R_1 = (R_1^1, \ldots, R_1^n)^*, \quad R_2 = (R_2^1, \ldots, R_2^n)^*,$$

$$a = (a^1, \ldots, a^n)^*, \quad b = (b^1, \ldots, b^r)^*.$$

Условия (1.3), (1.4), (2.4), дают

$$\|a(t) + x_1\| < C_1, \quad t \in [0, 1], \tag{2.7}$$

$$a(0) = -x_1. \tag{2.8}$$

Сделаем преобразование переменной t по формуле

$$1 - t = e^{-\alpha\tau}; \quad \tau \in [0, +\infty), \tag{2.9}$$

где $\alpha > 0$, подлежащая определению. Тогда система (2.6) и условие (2.7), (2.8) примут вид

$$\frac{dc}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} Pc + \alpha e^{-\alpha\tau} Qd + \alpha R_1(c, d, \tau) e^{-\alpha\tau} + \alpha R_2(c, d, \tau) e^{-\alpha\tau}; \tag{2.10}$$

$$c(\tau) = a(t(\tau)), \quad d(\tau) = b(t(\tau)), \quad \tau \in [0, +\infty), \tag{2.11}$$

$$c(0) = -x_1, \tag{2.12}$$

$$\|c(\tau) + x_1\| < C_1. \tag{2.13}$$

Наряду с (2.6) рассмотрим систему

$$\frac{dc}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} Pc + \alpha e^{-\alpha\tau} Qd; \quad \tau \in [0, +\infty). \tag{2.14}$$

Будем искать функцию $d(\tau)$ так, чтобы обеспечить экспоненциальную устойчивость системе (2.14). Пусть $\overline{q}_i;\ i = 1, \ldots, r$ — i-й столбец матрицы Q. Построим матрицу

$$S = \{\overline{q}_1, \ldots, P^{k_1 - 1}\overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_r, \ldots, P^{k_r - 1}\overline{q}_r\}. \tag{2.15}$$

Здесь $k_i; i = 1, \ldots, r$ — максимальное количество столбцов вида $\overline{q}_i$, $P\overline{q}_i$, ..., $P^{k_i - 1}\overline{q}_i$; $i = 1, \ldots, r$ таких, что векторы $\overline{q}_1$, $P\overline{q}_1$, ..., $P^{k_1 - 1}\overline{q}_1$, ..., $\overline{q}_r$, ..., $P^{k_r - 1}\overline{q}_r$ линейно независимы. Если ранг матрицы (2.15) равен n, то преобразование

$$c = Sy \tag{2.16}$$

приводит систему (2.14) к

$$\frac{dy}{d\tau} = \alpha S^{-1}PSe^{-\alpha\tau}y + \alpha S^{-1}Qe^{-\alpha\tau}d. \tag{2.17}$$

Согласно [2] стр. 30, матрицы $S^{-1}PS$ и $S^{-1}Q$ имеют вид

$$S^{-1}PS = \{\overline{e}_2, \overline{e}_3, \ldots, \overline{e}_{k_1}, \overline{g}_{k_1}, \ldots, \overline{e}_{k_{r-1}+2}, \ldots, \overline{e}_{k_r}, \overline{g}_{k_r}\}, \tag{2.18}$$

$\overline{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^*_{n\times 1}$, где 1 — стоит на i-м месте,

$$\overline{g}_{k_i} = (-g^o_{k_1}, \ldots, -g^{k_1-1}_{k_1}, \ldots, -g^o_{k_i}, \ldots, -g^{k_i-1}_{k_i}, 0, \ldots, 0)^*_{n\times 1};$$

$$i = 1, \ldots, r;$$

$$P^{k_i}\overline{q}_i = -\sum_{j=0}^{k_1-1} g^j_{k_1}P^j\overline{q}_1 - \ldots - \sum_{j=0}^{k_i-1} g^j_{k_i}P^j\overline{q}_i; \quad i = 1, \ldots, r. \tag{2.19}$$

В (2.19) $g^j_{k_1}; j = 0, \ldots, k_1 - 1, \ldots, g^j_{k_i}; j = 0, \ldots, k_i - 1$ являются коэффициентами разложения вектора $P^{k_i}\overline{q}_i$ по векторам $P^j\overline{q}_1$; $j = 0, \ldots, k_1 - 1, \ldots, P^j\overline{q}_j;\ j = 0, \ldots, k_i - 1$

$$S^{-1}Q = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_{k_i+1}, \ldots, \overline{e}_{\gamma+1}\}; \quad \gamma = \sum_{i=1}^{r-1} k_i. \tag{2.20}$$

Рассмотрим задачу стабилизации системы вида

$$\frac{dy_{k_i}}{d\tau} = \{\overline{e}^{k_i}_2, \ldots, \overline{e}^{k_i}_{k_i}, \overline{\overline{g}}_{k_i}\}\alpha e^{-\alpha\tau}y_{k_i} + \overline{e}^{k_i}_i \alpha e^{-\alpha\tau}d^i; \quad i = 1, \ldots, r, \tag{2.21}$$

$$y_{k_i} = (y^1_{k_i}, \ldots, y^{k_i}_{k_i})^*_{k_i\times 1}; \quad \overline{e}^{k_i}_i = (0, \ldots, 1 \ldots, 0)^*_{k_i\times 1},$$

где 1 — стоит на i-м месте.

$$\overline{\overline{g}}_{k_i} = (-g^o_{k_i}, \ldots, -g^{k_i-1}_{k_i})^*_{k_i\times 1}; \quad d = (d^1, \ldots, d^r)^*.$$

Система (2.21) в скалярной форме запишется так:

$$\frac{dy^1_{k_i}}{d\tau} = -\alpha g^o_{k_i}e^{-\alpha\tau}y^{k_i}_{k_i} + \alpha e^{-\alpha\tau}d^i$$

$$\frac{dy_{k_i}^2}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^1 - \alpha g_{k_i}^1 e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (2.22)$$

$$\frac{dy_{k_i}^{k_i-1}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i-2} - \alpha g_{k_i}^{k_i-2} e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i}$$

$$\frac{dy_{k_i}^{k_i}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i-1} - \alpha g_{k_i}^{k_1-1} e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i}.$$

Пусть $y_{k_i}^{k_i} = \alpha^{k_i}\psi$. Используя последнее уравнение системы (2.22) и индуктивный переход, будем иметь

$$y_{k_i}^{k_i} = \alpha^{k_i}\psi$$

$$y_{k_i}^{k_i-1} = \alpha^{k_i-1} e^{\alpha\tau}\psi^{(1)} + g_{k_i}^{k_i-1}\alpha^{k_i}\psi$$

$$y_{k_i}^{k_i-2} = \alpha^{k_i-2} e^{2\alpha\tau}\psi^{(2)} + (\alpha^{k_i-1} e^{2\alpha\tau} + \alpha^{k_i-1} e^{\alpha\tau} g_{k_i}^{k_i-1})\psi^{(1)} + \\ + g_{k_i}^{k_i-2}\alpha^{k_i}\psi$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (2.23)$$

$$y_{k_i}^1 = \alpha e^{(k_i-1)\alpha\tau}\psi^{(k_i-1)} + r_{k_i-2}(\tau)\psi^{(k_i-2)} + \ldots + r_1(\tau)\psi^{(1)} + \\ + \alpha^{k_i} g_{k_i}^1\psi.$$

Если продифференцировать последнее равенство (2.23), то из первого уравнения системы (2.22) получим

$$\psi^{(k_i)} + \varepsilon_{k_i-1}(\tau)\psi^{(k_i-1)} \ldots + \varepsilon_o(\tau)\psi = e^{-k_i\alpha\tau} d^i; \quad i = 1, \ldots, r. \quad (2.24)$$

В (2.23) функции $r_{k_i-2}(\tau), \ldots, r_1(\tau)$ являются линейными комбинациями экспонент с показателями не выше $(k_i - 1)\alpha\tau$. В (2.24) $\varepsilon_{k_i-1}(\tau), \ldots, \varepsilon_o(\tau)$ — линейные комбинации экспонент с показателями не больше нуля. Пусть

$$v^i = e^{-k_i\alpha\tau} d^i; \quad i = 1, \ldots, r. \quad (2.25)$$

Положим

$$v^i = \sum_{j=1}^{k_i} (\varepsilon_{k_i-j}(\tau) - \gamma_{k_i-j})\psi^{(k_i-j)}; \quad i = 1, \ldots, r, \quad (2.26)$$

где $\gamma_{k_i-j};\ j=1,\ldots,k_i$ выбраны так, чтобы корни уравнения

$$\lambda^{k_i}+\gamma_{k_i-1}\lambda^{k_i-1}+\ldots+\gamma_0=0;\quad i=1,\ldots,r,$$

$\lambda^1_{k_i},\ldots,\lambda^{k_i}_{k_i}$ удовлетворяли условиям

$$\lambda^i_{k_i}\neq\lambda^j_{k_i},\quad i\neq j,\quad \lambda^j_{k_i}<-(2k_i+1)\alpha-1, \tag{2.27}$$

$j=1,\ldots,k_i,\ i=1,\ldots,r.$ Используя (2.16), (2.22), (2.25), (2.26), получим

$$d^i=e^{k_i\alpha\tau}\delta_{k_i}T^{-1}_{k_i}S^{-1}_{k_i}c;\quad i=1,\ldots,r, \tag{2.28}$$

где: $\delta_{k_i}=(\varepsilon_{k_i-1}(\tau)-\gamma_{k_i-1},\ldots,\varepsilon_0(\tau)-\gamma_0)$; T_{k_i} — матрица равенства (2.23), т. е. $y_{k_i}=T_{k_i}\overline{\psi}$; $\overline{\psi}=(\psi^{(k_i-1)},\ldots,\psi)^*$; $S^{-1}_{k_i}$ — матрица, состоящая из соответствующих k_i - строк матрицы S^{-1}. Если подставить (2.28) в правую часть системы (2.14), то для ее решения $c(\tau)$ с начальными данными

$$c(0)=-x_1 \tag{2.29}$$

имеет место оценка

$$\|c(\tau)\|\leq M_0\|x_1\|e^{-\lambda\tau};\quad \lambda>1. \tag{2.30}$$

Рассмотрим систему (2.12), замкнутую управлением (2.28), предположив дополнительно, что ее решения удовлетворяют начальным данным (2.29) и ограничениям (2.13). Ее можно представить в виде

$$\frac{dc}{d\tau}=A(\tau)c+\alpha g_1(c,\tau)+\alpha g_2(c,\tau), \tag{2.31}$$

где

$$A(\tau)=\alpha e^{-\alpha\tau}P+\alpha e^{-\alpha\tau}Qe^{k\alpha\tau}\delta_kT^{-1}_kS^{-1}_k,$$

$$e^{k\alpha\tau}\delta_kT^{-1}_kS^{-1}_k=(e^{k_1\alpha\tau}\delta_{k_1}T^{-1}_{k_1}S^{-1}_{k_1},\ldots,e^{k_r\alpha\tau}\delta_{k_r}T^{-1}_{k_r}S^{-1}_{k_r})^*,$$

$$g_1(c,\tau)=e^{-\alpha\tau}R_1(c,\tau),\quad g_2(c,\tau)=e^{-\alpha\tau}R_2(c,\tau).$$

Условия (1.2), (2.2), (2.13), (2.28) и предположение относительно частных производных второго порядка от правой части (1.1) гарантируют существование констант $L>0$, $M>0$, $T_1>0$ таких, что

$$\|g_1(c,\tau)\|\leq L\left(e^{(2M-1)\alpha\tau}\|c\|^2+e^{(M-2)\alpha\tau}\|c\|\right);\ \|g_2(c,\tau)\|\leq T_1e^{-\alpha\tau},$$

$$M = \max k_i; \quad i = 1, \ldots, r. \tag{2.32}$$

Кроме того, из (2.27), (2.30) следует, что система

$$\frac{dc}{d\tau} = A(\tau)c \tag{2.33}$$

экспоненциально устойчива. Сделаем в (2.31) замену

$$c(\tau) = z(\tau)e^{-(2M-1)\alpha\tau}. \tag{2.34}$$

Рассмотрим систему

$$\frac{dz}{d\tau} = B(\tau)z + \alpha\bar{g}_1(z,\tau), \tag{2.35}$$

$$z(0) = -x_1, \tag{2.36}$$

$B(\tau) = A(\tau) + (2M-1)\alpha E; \quad \bar{g}_1(z,\tau) = e^{(2M-1)\alpha\tau} g_1(ze^{-(2M-1)\alpha\tau}, \tau);$

$$\|z(\tau)e^{-(2M-1)\alpha\tau} + x_1\| < C_1, \quad \tau \in [0, +\infty), \tag{2.37}$$

E — единичная матрица. Используя (2.32), (2.34), (2.36), (2.37) имеем

$$\|\bar{g}_1(z,\tau)\| \le L\|z\|^2 + Le^{(M-2)\alpha\tau}\|z\|. \tag{2.38}$$

Нетрудно видеть, что при достаточно малых $\alpha > 0$ из экспоненциальной устойчивости системы (2.33) следует экспоненциальная устойчивость системы

$$\frac{dz}{d\tau} = B(\tau)z \tag{2.39}$$

с показателем $-\beta = -\lambda + (2M-1)\alpha$, где $-\lambda$ — показатель экспоненциальной устойчивости системы (2.33).

Пусть $\Phi(\tau)$, $\Phi(0) = E$ — фундаментальная матрица системы (2.39). Решение системы (2.35) с начальными данными (2.36) и принадлежащее области (2.37) примет вид

$$z(\tau) = -\Phi(\tau)x_1 + \int\limits_0^\tau \alpha\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)\bar{g}_1(z,t)dt. \tag{2.40}$$

На основании (2.30)

$$\|\Phi(\tau)\| \le Ke^{-\beta\tau}, \tag{2.41}$$

где K — постоянная величина, вообще говоря, зависящая от β. При

$$\|z(\tau)\| \le C_1 - \|x_1\|; \quad \tau \in [0, \infty), \quad M \le 2 \tag{2.42}$$

имеет место

$$\|g_1(z,\tau)\| \le L_1\|z\|; \quad L_1 = L\left(C_1 + 1 - \|x_1\|\right). \tag{2.43}$$

Из (2.38), (2.40), (2.41) следует

$$\|z(\tau)\| \le Ke^{-\beta\tau}||x_1|| + \int\limits_0^\tau Ke^{-\beta(\tau-t)}\alpha L_1\|z\|dt. \tag{2.44}$$

Отсюда в соответствии с [3] имеем

$$\|z(\tau)\| \le Ke^{-\mu\tau}\|x_1\|, \quad \mu = \beta - \alpha K L_1. \tag{2.45}$$

Будем считать, что

$$\overline{g}_2(z,\tau) \equiv 0. \tag{2.46}$$

Предположим, что

$$-\mu < 0. \tag{2.47}$$

Пусть для x_1, u_1 выполнены условия

$$(K+1)\|x_1\| < C_1, \tag{2.48}$$

$$M \le 2. \tag{2.49}$$

Если подставить функции (2.40) в формулы (2.34), (2.28), (2.11), (2.9), (2.5), (2.4) то, согласно выводу уравнений (2.1), (2.6), (2.10), (2.31), правомерность которых гарантируется условиями (2.49), (2.48), (2.47), (2.37), (2.13), (2.7), (1.3), получим решение поставленной задачи. На основании изложенного справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для величин* C_1, α, *векторов* x_1, u_1, *правой части системы* (2.1) *и констант* T, M, K *выполнены условия* (2.49), (2.48), (2.47), (2.46), *а также матрица* (2.15) *невырожденная. Тогда существует решение поставленной задачи, которое сводится к решению задачи стабилизации линейной стационарной системы, интегрированию системы* (2.35), (2.36) *и последующему* *переходу к исходным переменным по формулам* (2.34), (2.11), (2.5), (2.4).

Рассмотрим случай $\overline{g}_2(c,\tau) \not\equiv 0$. Из экспонециальной устойчивости системы

$$\frac{dc}{d\tau} = A(\tau)c + \alpha g_1(c,\tau) \tag{2.50}$$

согласно [5] следует существование в области (2.48) положительно определенной функции $V(c,\tau)$ такой, что

$$\gamma_1\|c\|^2 \leq V(c,\tau) \leq \gamma_2\|c\|^2,$$

$$\left.\frac{dV}{d\tau}\right|_{(2.50)} \leq -\gamma_3\|c\|^2, \quad \|\mathrm{grad}_c V\| \leq \gamma_4\|c\|. \tag{2.51}$$

Здесь γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 – известные положительные постоянные.

С другой стороны,

$$\left.\frac{dV}{d\tau}\right|_{(2.31)} = \left.\frac{dV}{d\tau}\right|_{(2.50)} + \alpha e^{-\alpha\tau}(\mathrm{grad}\,_c V, R_2(c,\tau)). \tag{2.52}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы шар радиуса ε с центром в начале координат содержался в области (2.48). Для этого достаточно положить $\varepsilon < C_1/(K+1)$. Зафиксируем числа λ, δ:

$$\lambda = \gamma_1\|\varepsilon\|^2, \;\; \delta < \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\|\varepsilon\|. \tag{2.53}$$

Очевидно, что

$$V(c,\tau) < \lambda \quad \forall\, c: \quad \|c\| < \delta. \tag{2.54}$$

Используя (2.32), (2.51), (2.52), найдём $T > 0$ так, чтобы

$$\left.\frac{dV}{d\tau}\right|_{(2.31)} \leq -\gamma_3\|c\|^2 + \alpha e^{-\alpha\tau}T_1\gamma_4\|c\| < 0 \quad \forall\, c,\tau: \;\; \delta \leq \|c\| \leq \varepsilon, \tau \geq T. \tag{2.55}$$

Решение системы (2.31) с начальными данными (2.29) примет вид

$$c(\tau) = -\Phi_1(\tau)x_1 + \int\limits_0^\tau \alpha\Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)\,[g_1(c,t) + g_2(c,t)]\,dt. \tag{2.56}$$

Здесь $\Phi_1(\tau)$ фундаментальная матрица системы (2.33). Будем выбирать x_1 из области

$$\|\Phi_1(T)(x_1 + \int\limits_0^T \Phi_1^{-1}(t)\alpha[g_1(c,t) + g_2(c,t)]dt)\| \leq \delta. \qquad (2.57)$$

Очевидно (2.57) будет иметь место при

$$K_1(\|x_1\| + \alpha K_2 \cdot T) < \delta, \qquad (2.58)$$

где $K_1 = \|\Phi_1(T)\|$; $K_2 = \max_{\Omega_1} \|\Phi_1^{-1}(t)(g_1(c,t) + g_2(c,t))\|$, $\Omega_1 = \{c, t| \quad \|c\| \leq \varepsilon, \quad t \in [0,T]\}$. В силу (2.53)–(2.57) траектории $c(\tau)$ с начальными данными, удовлетворяющими (2.58) не покинут области $\|c\| \leq \varepsilon$. Из (2.52), (2.55) следует $V(c(\tau), \tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$. В свою очередь, (2.51) гарантирует $c(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$. На основании изложенного справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для состояний x_1, управлений u_1 и константы $\alpha > 0$ матрица* (2.15) *невырожденная, а также выполнены условия* (2.47), (2.49), (2.58). *Тогда существует решение поставленной задачи, которое сводится к решению задачи стабилизации линейной стационарной системы, интегрированию системы* (2.31) *с начальными данными* (2.29) *и последующему переходу к исходным переменным.*

Указатель литературы

1. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М., Наука. 1981. 400 с.
2. *Калман З., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М., Наука. 1971. 398 с.
3. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М., Мир. 1967. 223 с.
4. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., Наука. 1968. 475 с.
5. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физ. Мат. Гиз. 1959. 211 с.
6. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М., Наука. 1975. 494 с.

В. Ф. Кузютин, О. Н. Шедвартене, М. Дехгхан, А. Хеммат

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ СОСТАВНЫХ КВАДРАТУР НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

В приложениях при вычислении определенных интегралов применяют квадратуры вида

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{k=1}^{N} C_k \varphi(x_k). \tag{1}$$

Погрешностью квадратуры (1) на некотором классе функций Φ называют величину

$$\mathbf{R}_\Phi(C_k, x_k, N) = \sup_{\varphi\in\Phi}\Big|\int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{N} C_k\varphi(x_k)\Big|.$$

Пусть $W_2^{(m)}([0;1])$ — нормированное пространство непрерывных функций с абсолютно непрерывной производной порядка $m-1$ и производной порядка m, интегрируемой с квадратом на отрезке $[0;1]$.

Будем рассматривать классы функций $W_2^{(m)}(1,[0;1])$, таких, что $||\varphi||_{W_2^{(m)}([0;1])} = 1$.

Академик С. Л. Соболев в 1961 году предложил [1] новый метод нахождения погрешностей кубатур на заданных классах функций, сводящийся к решению некоторой краевой задачи в общем случае.

В работах [2,3] развит и конкретизирован метод С. Л. Соболева, получена погрешность квадратуры общего вида на некоторых классах функций в явной зависимости от коэффициентов и узлов квадратуры в общем случае и кубатуры общего вида в случае класса периодических функций.

Верна теорема 1 [2,3].

Теорема 1. *Оценка погрешности квадратуры* (1), *имеющей алгебраическую степень точности* d *на классах функций* $W_2^{(m)}(1,[0;1])$, *при* $1 \le m \le d+1$ *определяется формулой*

$$\mathbf{R}^2_{W_2^{(m)}(1,[0;1])}(C_k, x_k, N) = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} +$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}\frac{(-1)^s}{(m-s)!(m+s+1)!}+\sum_{k=1}^{N}C_k\left[\frac{2(-1)^{m+1}}{(2m)!}x_k^{2m}+\right. \tag{2}$$

$$\left.+\sum_{s=0}^{m-1}\frac{(-1)^{s+1}x_k^{m+s}}{(m-s)!(m+s)!}+\frac{(-1)^m}{2(2m-1)!}\sum_{l=1}^{N}C_l|x_k-x_l|^{2m-1}\right].$$

В этих же работах [2,3] исследовались составные квадратуры формул средних прямоугольников, трапеций, Симпсона, “правило трех восьмых”, найдены погрешности этих составных квадратур в зависимости от числа узлов N и полученные формулы погрешности протабулированы для ряда значений N.

В настоящей работе рассматриваются составные квадратуры Ньютона, Милна, трапеций и найдены оценки их погрешностей на соболевских классах функций в явной зависимости от числа узлов N.

Линейным преобразованием трехточечная квадратура Ньютона для отрезка $[-1;1]$ с алгебраической степенью точности $d=1$

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx\cong\frac{2}{3}\Big[\varphi\Big(-\frac{1}{2}\Big)+\varphi\Big(0\Big)+\varphi\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big]$$

сводится к отрезку $[0;1]$ и имеет вид

$$\int_{0}^{1}\varphi(x)dx\cong\frac{1}{3}\Big[\varphi\Big(\frac{1}{4}\Big)+\varphi\Big(\frac{1}{2}\Big)+\varphi\Big(\frac{3}{4}\Big)\Big].$$

Пусть N — произвольное натуральное число, $N\geq 5$, причем такое, что $N-1$ кратно четырем. Если отрезок интегрирования $[0;1]$ разделить на $N-1$ частей с шагом $\frac{1}{N-1}$ и к каждой паре отрезков, следующих друг за другом, применить квадратурную формулу Ньютона, то получаем составную квадратурную формулу Ньютона на базе трехточечной с N узлами:

$$\int_{0}^{1}\varphi(x)dx\cong\frac{4}{3(N-1)}\Bigg(\sum_{k=0}^{N-1}\varphi\Big(\frac{k}{N-1}\Big)-\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{4}}\varphi\Big(\frac{4k}{N-1}\Big)\Bigg). \tag{3}$$

Линейным преобразованием четырехточечная квадратура Ньютона с алгебраической степенью точности $d=1$ для $[-1;1]$

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx\cong\frac{1}{2}\Big[\varphi\Big(-\frac{2}{3}\Big)+\varphi\Big(-\frac{1}{3}\Big)+\varphi\Big(\frac{1}{3}\Big)+\varphi\Big(\frac{2}{3}\Big)\Big]$$

сводится к отрезку $[0;1]$ и имеет вид

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \frac{1}{4}\Big[\varphi\Big(\frac{1}{6}\Big) + \varphi\Big(\frac{2}{6}\Big) + \varphi\Big(\frac{4}{6}\Big) + \varphi\Big(\frac{5}{6}\Big)\Big].$$

Пусть N — произвольное натуральное число, $N \geq 7$, причем такое, что $N-1$ кратно шести. Если отрезок интегрирования $[0;1]$ разделить на $N-1$ частей с шагом $\frac{1}{N-1}$ и к каждой паре отрезков, следующих друг за другом, применить четырехточечную квадратуру Ньютона, то получаем составную квадратуру Ньютона на базе четырехточечной с N узлами той же алгебраической степени точности:

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \frac{6}{4(N-1)}\Bigg(\sum_{k=0}^{N-1} \varphi\Big(\frac{k}{N-1}\Big) - \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{3}} \varphi\Big(\frac{3k}{N-1}\Big)\Bigg). \qquad (4)$$

Линейным преобразованием пятиточечная квадратура Милна для отрезка $[-1,1]$ с алгебраической степенью точности $d=3$

$$\int_{-1}^1 \varphi(x)dx \cong \varphi\Big(-\frac{2}{3}\Big) - \varphi\Big(-\frac{1}{3}\Big) + 2\varphi(0) - \varphi\left(\frac{1}{3}\right) + \varphi\left(\frac{2}{3}\right)$$

сводится к квадратуре на отрезке $[0;1]$:

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2}\varphi\Big(\frac{2}{6}\Big) + \varphi\Big(\frac{3}{6}\Big) - \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{4}{6}\right) + \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{5}{6}\right).$$

Пусть N — произвольное натуральное число, $N \geq 7$, причем такое, что $N-1$ кратно шести. Если отрезок интегрирования $[0;1]$ разделить на $N-1$ частей с шагом $\frac{1}{N-1}$ и к каждому частичному отрезку применить квадратуру Милна, то можно получить составную квадратурную формулу Милна на базе пятиточечной с N узлами:

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \frac{3}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} \varphi\Big(\frac{k}{N-1}\Big) - \frac{6}{N-1}\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \varphi\left(\frac{2k}{N-1}\right) +$$

$$+\frac{3}{N-1}\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{3}} \varphi\left(\frac{3k}{N-1}\right). \qquad (5)$$

Линейным преобразованием четырехточечная квадратура трапеций для отрезка $[-1,1]$ с алгебраической степенью точности $d=1$

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)dx \cong \frac{2}{3}\varphi\Big(-\frac{1}{3}\Big)+\frac{2}{3}\varphi\Big(\frac{1}{3}\Big)+\frac{1}{3}\varphi(-1)+\frac{1}{3}\varphi(1)$$

сводится к квадратуре на отрезке $[0;1]$:

$$\int_{0}^{1}\varphi(x)dx \cong \frac{1}{6}\varphi(0)+\frac{1}{3}\varphi\Big(\frac{1}{3}\Big)+\frac{1}{3}\varphi\Big(\frac{2}{3}\Big)+\frac{1}{6}\varphi(1).$$

Пусть N — произвольное натуральное число, $N\geq 4$, причем такое, что $N-1$ кратно трем. Если отрезок интегрирования $[0;1]$ разделить на $N-1$ частей с шагом $\frac{1}{N-1}$ и к каждому частичному отрезку применить четырехточечную квадратуру трапеций, то можно получить составную квадратурную формулу трапеций на базе четырехточечной с N узлами:

$$\int_{0}^{1}\varphi(x)dx \cong \frac{1}{2(N-1)}\Big(\varphi(0)+2\sum_{k=1}^{N-2}\varphi\Big(\frac{k}{N-1}\Big)+\varphi(1)\Big). \qquad (6)$$

Верны следующие теоремы.

Теорема 2. *Погрешность составной квадратуры Ньютона на базе трехточечной* (3) *на классах функций* $W_2^{(m)}(1,[0;1])$ *при* $m=1,2$ *определяется формулами*

$$\mathbf{R}_{W_2^{(1)}(1,[0;1])}(N)=\frac{\sqrt{2}}{3(N-1)},\quad \mathbf{R}_{W_2^{(2)}(1,[0;1])}(N)=\frac{\sqrt{41}}{3\sqrt{30}(N-1)^2}.$$

Теорема 3. *Погрешность составной квадратуры Ньютона на базе четырехточечной* (4) *на классах функций* $W_2^{(m)}(1,[0;1])$ *при* $m=1,2$ *определяется формулами*

$$\mathbf{R}_{W_2^{(1)}(1,[0;1])}(N)=\frac{1}{2(N-1)},\quad \mathbf{R}_{W_2^{(2)}(1,[0;1])}(N)=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{30}(N-1)^2}.$$

Теорема 4. *Погрешность составной квадратуры Милна с* N *узлами* (2) *на классах функций* $W_2^{(m)}(1,[0;1])$ *при* $m=1,2,3,4$ *определяется соотношениями*

$$\mathbf{R}_{W_2^{(1)}(1,[0;1])}(N)=\frac{\sqrt{3}}{N-1},\quad \mathbf{R}_{W_2^{(3)}(1,[0;1])}(N)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{70}(N-1)^3}.$$

$$\mathbf{R}_{W_2^{(2)}(1,[0;1])}(N)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}(N-1)^2},\quad \mathbf{R}_{W_2^{(4)}(1,[0;1])}(N)=\frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{70}(N-1)^4}.$$

Теорема 5. *Погрешность составной квадратуры трапеций на базе четырехточечной с N узлами (6) на классах функций $W_2^{(m)}(1,[0;1])$ при $m=1,2$ определяется формулами*

$$\mathbf{R}_{W_2^{(1)}(1,[0;1])}(N)=\frac{1}{12(N-1)^2},\quad \mathbf{R}_{W_2^{(2)}(1,[0;1])}(N)=\frac{1}{120(N-1)^4}.$$

При доказательстве теорем следует воспользоваться основной теоремой 1 об оценке погрешности квадратуры общего вида на соболевских классах функций [2,3] и рядом равенств, получаемых из известных формул:

$$\sum_{k=1}^{N}(2k-1)^p=\sum_{k=1}^{2N}k^p-2^p\sum_{k=1}^{N}k^p,$$

$$\sum_{k=1}^{N}k^p=\frac{N^{p+1}}{p+1}+\frac{N^p}{2}+\frac{B_1}{2!}pN^{p-1}-\frac{B_2}{4!}p(p-1)(p-2)N^{p-3}+\ldots,$$

где B_i — числа Бернулли.

Указатель литературы

1. *Соболев С.Л.* О формулах механических кубатур в n-мерном пространстве. Докл. АН СССР. 1961. Т.137. №3. С. 527–530.

2. *Кузютин В.Ф.* Погрешности приближенных формул интегрирования. Л., изд-во ЛГУ, 1982. 132 с.

3. *Жук В.В., Кузютин В.Ф.* Аппроксимация функций и численное интегрирование. СПб: изд-во СПбГУ. 1995. 352 с.

О.А. Малафеев, В.В. Куницын

ИДЕМПОТЕНТНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

1. Дифференциальные игры конечной длительности

Рассмотрим динамическую антагонистическую игру с полной информацией. Пусть задана ее нормальная форма $\Gamma_H = \{\Phi_1, \Phi_2, H\}$, где Φ_1, Φ_2 — множества стратегий первого и второго игроков; H — функция выигрыша второго игрока, заданная на множестве $\Phi = \Phi_1 \times \Phi_2$ и действующая в R^1. Введем верхнее $\bar{V}$ и нижнее $\underline{V}$ значения игры:

$$\bar{V} = \inf_{\varphi_1 \in \Phi_1} \sup_{\varphi_2 \in \Phi_2} H(\varphi_1, \varphi_2), \quad \underline{V} = \sup_{\varphi_2 \in \Phi_2} \inf_{\varphi_1 \in \Phi_1} H(\varphi_1, \varphi_2).$$

Тогда, если $\underline{V} = \bar{V}$, то говорят, что игра имеет значение и полагают $Val(\Gamma_H) = \underline{V} = \bar{V}$. Теперь дадим несколько определений.

Идемпотентной полугруппой называется множество M, снабженное коммутативной и ассоциативной операцией $\oplus$, обладающей нейтральным элементом $\hat{0}$ и удовлетворяющей условию идемпотентности: $\forall a \in M$ выполняется равенство $a \oplus a = a$.

Идемпотентная полугруппа называется *идемпотентным полукольцом,* если на ней определена еще одна ассоциативная операция $\odot$, обладающая нейтральным элементом $\hat{1}$ и удовлетворяющая законам дистрибутивности $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$; $(b \oplus c) \odot a = b \odot a \oplus c \odot a$, а также свойству $\hat{0} \odot a = \hat{0}, \forall a$.

Идемпотентное полукольцо называется *коммутативным или абелевым,* если операция $\odot$ коммутативна.

Рассмотрим расширенную прямую $\bar{R}^1$ с операциями $\oplus = \min, \odot = \max$, нейтральными элементами $\hat{0} = +\infty$, $\hat{1} = -\infty$. Тогда так определенная структура является идемпотентным полукольцом, причем здесь обе операции идемпотентны. На этом идемпотентном полукольце можно ввести метрику дополнительным условием минимаксности и монотонности [2]. Так определенное идемпотентное метрическое полукольцо назовем A. Пусть X произвольное множество. Назовем A-мерой на X функцию $f : X \to A$, где $\mu_f^{\oplus}(B) = \inf\{f(x) | x \in B\}$, $\mu_f^{\odot}(B) = \sup\{f(x) | x \in B\}$, для любого множества $B \subset A$. Тем самым функция f индуцирует две меры $\mu_f^{\oplus}$ и $\mu_f^{\odot}$. Если $h : X \to A$ – некоторая функция, то можно ввести для нее два идемпотентных интеграла по мерам $\mu_f^{\oplus}$ и $\mu_f^{\odot}$, где

$$\int\limits_X^{\oplus} h(x) d\mu_f^{\oplus}(x) = \inf_X (f(x) \odot h(x)) = \inf_X \max(f(x), h(x))$$

и

$$\int\limits_X^{\odot} h(x) d\mu_f^{\odot}(x) = \sup_X (f(x) \oplus h(x)) = \sup_X \min(f(x), h(x)).$$

Многие свойства обычного интеграла могут быть перенесены на данный случай. В частности идемпотентные интегралы линейны по операциям $\oplus$, $\odot$. Также справедлив идемпотентный аналог теоремы Фубини (для случая двойного интегрирования по одной операции).

Перейдем к теории игр. Исходя из данных выше определений верхнее и нижнее значения игры могут быть представлены двойными идемпотентными интегралами и вопрос существования значения игры сводится к вопросу перестановочности этих интегралов (назовем это свойство теоремой Фубини для случая двойного интегрирования по разным операциям). А именно:

$\underline{V} = \int\limits_{\Phi_2}^{\odot} d\mu_{\hat{0}} \int\limits_{\Phi_1}^{\oplus} H(\varphi_1, \varphi_2) d\mu_{\hat{1}}$ и $\bar{V} = \int\limits_{\Phi_1}^{\oplus} d\mu_{\hat{1}} \int\limits_{\Phi_2}^{\odot} H(\varphi_1, \varphi_2) d\mu_{\hat{0}}$, где: $\mu_{\hat{1}}$ и $\mu_{\hat{0}}$ меры, индуцированные функциями $f_1 : \Phi_1 \to A$; $f_0 : \Phi_2 \to A$, такими , что: $f_1 \equiv \hat{1}(= -\infty)$; $f_0 \equiv \hat{0}(= +\infty)$. В рамках данных определений можно обобщить понятия верхнего и нижнего значения для игры Γ_H. Пусть $f_1 : \Phi_1 \to A$; $f_2 : \Phi_2 \to A$ произвольные функции. Обозначим $\bar{V}_{f_1,f_2} = \int\limits_{\Phi_1}^{\oplus} d\mu_{f_1} \int\limits_{\Phi_2}^{\odot} H(\varphi_1, \varphi_2) d\mu_{f_2}$ и

$\underline{V}_{f_1,f_2} = \int\limits_{\Phi_2}^{\odot} d\mu_{f_2} \int\limits_{\Phi_1}^{\oplus} H(\varphi_1, \varphi_2) d\mu_{f_1}$. Исходя из этих определений обычные верхнее и нижнее значения игры являются частными случаями обобщенных: $\bar{V} = \bar{V}_{\hat{1},\hat{0}}$ и $\underline{V} = \underline{V}_{\hat{1},\hat{0}}$. Теперь докажем некоторые факты для так определенных верхнего и нижнего значения игры.

Теорема 1.1. *Пусть $f_1 : \Phi_1 \to A$; $f_2 : \Phi_2 \to A$ произвольные функции, заданные на множестве стратегий первого и второго игроков соответственно. Тогда*

$$\underline{V}_{f_1,f_2} \le \bar{V}_{f_1,f_2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимо проверить неравенство:

$$\sup_{\Phi_2}\min(f_2(\varphi_2),\inf_{\Phi_1}\max(f_1(\varphi_1),H(\varphi_1,\varphi_2)))\le$$

$$\le\inf_{\Phi_1}\max(f_1(\varphi_1),\sup_{\Phi_2}\min(f_2(\varphi_2),H(\varphi_1,\varphi_2))).$$

Для этого достаточно доказать

$$\begin{gathered}\min(f_2(\varphi_2),\inf_{\Phi_1}\max(f_1(\varphi_1),H(\varphi_1,\varphi_2)))\le\\ \le\max(f_1(\varphi_1),\sup_{\Phi_2}\min(f_2(\varphi_2),H(\varphi_1,\varphi_2))),\end{gathered}\tag{1}$$

для любых φ_1,φ_2. Напишем следующие неравенства:

$$\min(f_2(\varphi_2),\inf_{\Phi_1}f_1(\varphi_1))\le f_2(\varphi_2)\le\sup_{\Phi_2}f_2(\varphi_2)\le\tag{2}$$

$$\le\max(f_1(\varphi_1),\sup_{\Phi_2}f_2(\varphi_2))\tag{3}$$

$$\min(f_2(\varphi_2),\inf_{\Phi_1}f_1(\varphi_1))\le\inf_{\Phi_1}f_1(\varphi_1)\le f_1(\varphi_1)\le\tag{4}$$

$$\le\max(f_1(\varphi_1),\sup_{\Phi_2}H(\varphi_1,\varphi_2))\tag{5}$$

$$\min(f_2(\varphi_2),\inf_{\Phi_1}H(\varphi_1,\varphi_2))\le f_2(\varphi_2)\le\sup_{\Phi_2}f_2(\varphi_2)\le\tag{6}$$

$$\le\max(f_1(\varphi_1),\sup_{\Phi_2}f_2(\varphi_2))\tag{7}$$

$$\begin{gathered}\min(f_2(\varphi_2),\inf_{\Phi_1}H(\varphi_1,\varphi_2))\le\inf_{\Phi_1}H(\varphi_1,\varphi_2)\le H(\varphi_1,\varphi_2)\le\\ \le\sup_{\Phi_2}H(\varphi_1,\varphi_2)\le\max(f_1(\varphi_1),\sup_{\Phi_2}H(\varphi_1,\varphi_2)).\end{gathered}\tag{8}$$

Тогда, исходя из неравенств (3)–(8), получаем неравенство (1). Следовательно $\underline{V}_{f_1,f_2}\le\bar{V}_{f_1,f_2}$.

В силу доказанного выше утверждения справедлива оценка, оправдывающая названия верхнего и нижнего значений, но нам интересен вопрос перестановочности вышеописанных двойных идемпотентных интегралов, т.е. случай равенства верхнего и нижнего значений.

Пусть $H : \Phi_1 \times \Phi_2 \to A$ – функция выигрыша второго игрока; $f_1 : \Phi_1 \to A$, $f_2 : \Phi_2 \to A$, причем $\forall \varphi_1 \in \Phi_1, \varphi_2 \in \Phi_2$ выполняется неравенство

$$f_2(\varphi_2) \geq f_1(\varphi_1). \tag{9}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\hat{H} : \Phi_1 \times \Phi_2 \to A$, где $\hat{H}(\varphi_1, \varphi_2) = (H(\varphi_1, \varphi_2) \odot f_1(\varphi_1)) \oplus f_2(\varphi_2)$. Из условия (9) видно, что $\hat{H}(\varphi_1, \varphi_2) = (H(\varphi_1, \varphi_2) \oplus f_2(\varphi_2)) \odot f_1(\varphi_1)$. Теперь докажем следующее утверждение, касающееся перестановочности интегралов.

Лемма 1.1. *Пусть выполнено условие* (9) *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon)$ *–* ε*-седловая точка для функции* $\hat{H}(\varphi_1, \varphi_2)$. *Тогда*

$$\underline{V}_{f_1,f_2} = \bar{V}_{f_1,f_2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходя из определения ε-седловой точки, получаем:

$$\begin{aligned}
&(H(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon) \odot f_1(\varphi_1^\varepsilon)) \oplus f_2(\varphi_2^\varepsilon) \leq \\
&\leq \inf_{\Phi_1}((H(\varphi_1, \varphi_2^\varepsilon) \odot f_1(\varphi_1)) \oplus f_2(\varphi_2^\varepsilon)) + \varepsilon = \\
&= \inf_{\Phi_1} \min(H(\varphi_1, \varphi_2^\varepsilon) \odot f_1(\varphi_1)); f_2(\varphi_2^\varepsilon)) + \varepsilon = \\
&= \min(\inf_{\Phi_1}(H(\varphi_1, \varphi_2^\varepsilon) \odot f_1(\varphi_1)); f_2(\varphi_2^\varepsilon)) + \varepsilon = \\
&= (\overset{\oplus}{\int\limits_{\Phi_1}} H(\varphi_1, \varphi_2^\varepsilon) d\mu_{f_1} \oplus f_2(\varphi_2^\varepsilon)) + \varepsilon \leq \\
&\leq \sup_{\Phi_2}(\overset{\oplus}{\int\limits_{\Phi_1}} H(\varphi_1, \varphi_2) d\mu_{f_1} \oplus f_2(\varphi_2^\varepsilon)) + \varepsilon = \\
&= \overset{\odot}{\int\limits_{\Phi_2}} d\mu_{f_2} \overset{\oplus}{\int\limits_{\Phi_1}} H(\varphi_1, \varphi_2) d\mu_{f_1} + \varepsilon = \underline{V}_{f_1,f_2} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем, что $(H(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon) \odot f_1(\varphi_1^\varepsilon)) \oplus f_2(\varphi_2^\varepsilon) \geq \bar{V}_{f_1,f_2} - \varepsilon$. Следовательно имеем цепочку неравенств: $\bar{V}_{f_1,f_2} - \varepsilon \leq \hat{H}(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon) \leq \underline{V}_{f_1,f_2} + \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$. Но в силу утверждения 1 получаем $\bar{V}_{f_1,f_2} = \underline{V}_{f_1,f_2}$.

Исходя из этих двух утверждений изучение равенства обобщенных верхнего и нижнего значений (т.е. перестановочности интегралов) можно ограничить изучением существования ε-седловой точки игры с новой платежной функцией $\hat{H}(\varphi_1, \varphi_2)$. Поэтому далее будем рассматривать значения игры в обычном смысле. Для дальнейшего нам понадобится обобщение теоремы Цермело-Неймана для случая многошаговых игр двух лиц с конечным числом альтернатив.

Пусть заданы два некоторых множества X, Y и семейства подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^X$, $\mathcal{B} \subset 2^Y$. Также определены функции H_1, H_2, действующие из $X \times Y$ в R^1. Описываемая ниже игра $\Gamma^N_{x_0y_0}$ является многошаговой игрой двух лиц с полной информацией. (Здесь $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ — начальные позиции, $N < +\infty$ — максимальное число шагов в данной игре.) Игроки делают поочередно шаги, выбирая очередную точку множества X (Y), из множества альтернатив A (B), содержащемся в $\mathcal{A}$ $(\mathcal{B})$ и зависящем от всех предыдущих выборов обоих игроков. Игра обрывается по достижении игроками терминальных позиций, после чего игроку P_1 выплачивается $H_1(a,b)$; игроку P_2 выплачивается $H_2(a,b)$. Здесь a, b терминальные позиции. Тем самым мы описали игру $\Gamma^N_{x_0y_0}$.

Теперь сформулируем и докажем обобщение теоремы Цермело-Неймана.

Лемма 1.2. *Пусть* $\Gamma^N_{x_0y_0}$ *– многошаговая игра двух лиц с полной информацией. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1). *Если платежные функции* H_1, H_2 *ограничены сверху на множестве всех возможных выборов игроков* P_1, P_2; *то в игре существует ситуация* ε*-равновесия, для любого* $\varepsilon > 0$.

2). *Если* $H_1 = -H_2$ *(игра антагонистическая, т.е. с нулевой суммой) и выборы игроки совершают из топологических пространств* (X, τ) *и* $(Y, \acute{\tau})$ *соответственно, причем на каждом конкретном шаге игроки делают свой выбор из некоторого (зависящего от всех предыдущих выборов* P_1, P_2*) счетно-компактного подмножества пространства* X *или* Y; *и значение игры*
$Val(\Gamma^N_{xy}(x,y))$ *полунепрерывно снизу по* x *и полунепрерывно сверху по* y, *то в игре существует ситуация чистого равновесия.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1). Доказательство первой части утверждения будем проводить индукцией по N. База индукции $(N = 0)$ очевидна. Пусть утверждение справедливо для всех $N < K$. Докажем, что оно справедливо для игры $\Gamma^K_{x_0y_0}$. Предположим, что первый ход принадлежит игроку P_1. Его множество альтернатив это $A_1 \in \mathcal{A}$. Пусть $\Gamma^{K-1}_{ay_0}$ (где $a \in A_1$) усечение игры $\Gamma^K_{x_0y_0}$, получающееся из нее исключением первого хода. Пусть $\Phi_1(a)$ есть множество чистых стратегий P_1 в игре $\Gamma^{K-1}_{ay_0}$, а $\Phi_2(a)$ — множество чистых стратегий P_2. По предположению индукции, имеется точка $\frac{\varepsilon}{2}$ - равновесия в каж-

дой из игр $\Gamma^{K-1}_{ay_0}$. Обозначим ее $(\varphi_1^{\varepsilon/2}(a), \varphi_2^{\varepsilon/2}(a))$. Тогда имеем: $H_1^a(\varphi_1^{\varepsilon/2}(a), \varphi_2^{\varepsilon/2}(a)) \geq H_1^a(\varphi_1(a), \varphi_2^{\varepsilon/2}(a)) - \frac{\varepsilon}{2}$, для всех $\varphi_1(a) \in \Phi_1(a)$ и $H_2^a(\varphi_1^{\varepsilon/2}(a), \varphi_2^{\varepsilon/2}(a)) \geq H_2^a(\varphi_1^{\varepsilon/2}(a), \varphi_2(a)) - \frac{\varepsilon}{2}$, для всех $\varphi_2(a) \in \Phi_2(a)$. Здесь H_1^a, H_2^a платежные функции, заданные на стратегиях, в игре $\Gamma^{K-1}_{ay_0}$. Нетрудно видеть, что $\overset{\odot}{\int\limits_{a\in A_1}} H_1^a(\varphi_1^{\varepsilon/2}(a), \varphi_2^{\varepsilon/2}(a)) d\mu_{\hat{0}} \leq C = const$, т.к. платежные функции ограничены сверху. Тогда в силу свойств идемпотентного интеграла существует $a^* \in A_1$, такое, что:
$\overset{\odot}{\int\limits_{a\in A_1}} H_1^a(\varphi_1^{\varepsilon/2}(a), \varphi_2^{\varepsilon/2}(a)) d\mu_{\hat{0}} \leq H_1^{a^*}(\varphi_1^{\varepsilon/2}(a^*), \varphi_2^{\varepsilon/2}(a^*)) + \frac{\varepsilon}{2}$.
Определим функцию φ_1^{ε}, положив ее равной $a^* \in A_1$, на первом ходу. В остальных случаях положим φ_1^{ε} равной $\varphi_1^{\varepsilon/2}(a)$, где P_1 совершает выбор в точке, принадлежащей игре $\Gamma^{K-1}_{ay_0}$. Функцию φ_2^{ε} определим равной $\varphi_2^{\varepsilon/2}(a)$, где P_2 совершает выбор в точке, принадлежащей игре $\Gamma^{K-1}_{ay_0}$. Тогда $(\varphi_1^{\varepsilon}, \varphi_2^{\varepsilon})$ ситуация в игре $\Gamma^{K}_{x_0y_0}$. Докажем, что эта ситуация $\varepsilon-$. Пусть $\varphi_2 \in \Phi_2$ произвольная стратегия P_2 в игре $\Gamma^{K}_{x_0y_0}$. Тогда

$$\begin{gathered} H_2(\varphi_1^{\varepsilon}, \varphi_2^{\varepsilon}) = H_2^{a^*}(\varphi_1^{\varepsilon/2}(a^*), \varphi_2^{\varepsilon/2}(a^*)) \geq \\ \geq H_2^{a^*}(\varphi_1^{\varepsilon/2}(a^*), \varphi_2^{\varepsilon/2}(a^*)) - \tfrac{\varepsilon}{2} = H_2(\varphi_1^{\varepsilon}, \varphi_2) - \tfrac{\varepsilon}{2}. \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь $\varphi_1^{\varepsilon/2}(a^*)$ усечение φ_1^{ε} в игре $\Gamma^{K-1}_{a^*y_0}$, $\varphi_2^{\varepsilon/2}(a^*)$ усечение φ_2^{ε}, а $\varphi_2(a^*)$ усечение φ_2 в игре $\Gamma^{K-1}_{a^*y_0}$. Теперь рассмотрим $\varphi_1 \in \Phi_1$, где φ_1 произвольная стратегия P_1 в игре $\Gamma^{K}_{x_0y_0}$. Пусть на первом шаге P_1 выбирает $a_0 \in A_1$. Тогда имеем цепочку неравенств:

$$\begin{gathered} H_1(\varphi_1^{\varepsilon}, \varphi_2^{\varepsilon}) = H_1^{a^*}(\varphi_1^{\varepsilon/2}(a^*), \varphi_2^{\varepsilon/2}(a^*)) \geq \\ \geq H_1^{a_0}(\varphi_1^{\varepsilon/2}(a_0), \varphi_2^{\varepsilon/2}(a_0)) - \tfrac{\varepsilon}{2} \geq \\ \geq H_1^{a_0}(\varphi_1(a_0), \varphi_2^{\varepsilon/2}(a_0)) - \tfrac{\varepsilon}{2} - \tfrac{\varepsilon}{2} = H_1(\varphi_1, \varphi_2^{\varepsilon}) - \varepsilon. \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь $\varphi_1(a_0)$ – усечение φ_1 в игре $\Gamma^{K-1}_{a_0y_0}$. В этой цепочке первое неравенство следует из определения a^*, а второе из того, что $(\varphi_1^{\varepsilon/2}(a_0), \varphi_2^{\varepsilon/2}(a_0))$ точка $\frac{\varepsilon}{2}-$ в игре $\Gamma^{K-1}_{a_0y_0}$. Следовательно из (10) и (11) получаем, что $(\varphi_1^{\varepsilon}, \varphi_2^{\varepsilon})$ ситуация $\varepsilon-$ в игре $\Gamma^{K}_{x_0y_0}$. Тем самым первая часть утверждения доказана.

2). Доказательство второй части утверждения мы дадим позднее, после введения необходимых определений.

З а м е ч а н и е 1. Как следствие этого утверждения получаем теорему Цермело-Неймана для случая позиционных игр двух лиц с конечным числом альтернатив.

Напомним определение полунепрерывной функции. Пусть (X, τ) топологическое пространство и функция f действует из X в A. Тогда f называется полунепрерывной снизу (сверху) в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность точки x_0, в которой $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ $(f(x) < f(x_0) + \varepsilon)$.

Здесь f принимает конечное значение в точке x_0. Если же $f(x_0) = -\infty$ (т.е. в терминах идемпотентного полукольца $f(x_0) = \hat{1}$), то функцию f будем считать полунепрерывной снизу в x_0. Если при этом для любого $h > 0$ существует окрестность точки x_0, в которой $f(x) < -h$, то будем считать, что функция f полунепрерывна и сверху в точке x_0. Аналогично мы можем определить понятие полунепрерывности функции f в точке x_0, для которой $f(x_0) = +\infty$. Для полунепрерывных функций из курса функционального анализа известно следующее утверждение.

Лемма 1.3. *Пусть $f : X \to A$ и f конечная полунепрерывная снизу (сверху) функция, заданная на счетно-компактном пространстве X. Тогда существует точка $x_0 \in X$, такая, что*:

$$f(x_0) = \int\limits_X^{\oplus} f(x) d\mu_{\hat{1}} \quad \Big(f(x_0) = \int\limits_X^{\odot} f(x) d\mu_{\hat{0}}\Big).$$

Рассмотрим (X, τ), $(Y, \hat{\tau})$ два счетно-компактных топологических пространства. Пусть функция $H(x, y)$ действует из $X \times Y$ в R^1. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.4. *Если $H(x, y)$ полунепрерывна снизу по x и полунепрерывна сверху по y, то определена функция $f(y) =$* $\min_{x \in X} H(x, y)$
$= \int\limits_X^{\oplus} H(x, y) d\mu_{\hat{1}}$ *и $f(y)$ является полунепрерывной сверху по y. Также определена функция $g(x) = \max_{y \in Y} H(x, y) = \int\limits_Y^{\odot} H(x, y) d\mu_{\hat{0}}$ и $g(x)$ является полунепрерывной снизу по x.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предыдущего утверждения функции $f(y)$ и $g(x)$ определены, т.к. X и Y счетно-компактные пространства. Докажем, что $f(y)$ полунепрерывна сверху. Фиксируем $y_0 \in Y$. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. По построению $f(y_0) = \min_{x \in X} H(x, y_0) = H(x_0, y_0)$. Но $H(x_0, y)$ полунепрерывна сверху по y из условия. Следовательно, существует окрестность точки y_0, в которой $H(x_0, y) < H(x_0, y_0) + \varepsilon = f(y_0) + \varepsilon$. Но $f(y) = \min_{x \in X} H(x, y) \leq H(x_0, y)$, для любого $y \in Y$. Следовательно существует окрестность точки y_0, в которой $f(y) < f(y_0) + \varepsilon$, т.е. $f(y)$ полунепрерывна сверху в точке y_0. Для функции $g(x)$ доказательство аналогично.

Лемма 1.5. *Пусть $H : X \times Y \to R^1$; X, Y — счетно-компактные топологические пространства. Функция H полунепрерывна снизу по первой переменной и полунепрерывна сверху по второй. Тогда имеют смысл следующие выражения:*

$$\max_{y \in Y} \min_{x \in X} H(x, y) = \int\limits_{Y}^{\odot} d\mu_{\hat{0}} \int\limits_{X}^{\oplus} H(x, y) d\mu_{\hat{1}}$$

и

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} H(x, y) = \int\limits_{X}^{\oplus} d\mu_{\hat{1}} \int\limits_{Y}^{\odot} H(x, y) d\mu_{\hat{0}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение является прямым следствием предыдущих лемм.

Напомним определение расстояния отклонения между множествами.

Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Рассмотрим A, B – произвольные подмножества X. Тогда

$\rho(a, B) = \rho(B, a) = \int\limits_{b \in B}^{\oplus} \rho(a, b) d\mu_{\hat{1}}$, где $a \in X$. Так же мы определим $\rho^*(A, B) = \int\limits_{a \in A}^{\odot} \rho(a, B) d\mu_{\hat{0}} = \int\limits_{a \in A}^{\odot} d\mu_{\hat{0}} \int\limits_{b \in B}^{\oplus} \rho(a, b) d\mu_{\hat{1}}$ и $\rho(A, B) = \rho(B, A) = \max(\rho^*(A, B), \rho^*(B, A))$.

Лемма 1.6. *Пусть $f : X \times Y \to R^1$ полунепрерывная снизу по x и полунепрерывная сверху по y вещественная функция, заданная на произведении метрических пространств X и Y. Также определены A, B счетно-компактнозначные отображения метрических* *пространств R, S в 2^X, 2^Y соответственно. Причем A полунепрерывно сверху на R; B полунепрерывно сверху на S. Тогда имеют смысл формальные выражения:*

$$F(r,s) = \max_{y\in B(s)} \min_{x\in A(r)} f(x,y) = \int\limits_{B(s)}^{\odot} d\mu_{\hat{0}} \int\limits_{A(r)}^{\oplus} f(x,y)d\mu_{\hat{1}},$$

$$G(r,s) = \min_{x\in A(r)} \max_{y\in B(s)} f(x,y) = \int\limits_{A(r)}^{\oplus} d\mu_{\hat{1}} \int\limits_{B(s)}^{\odot} f(x,y)d\mu_{\hat{0}};$$

и функции $F: R\times S \to R^1$, $G: R\times S\to R^1$ полунепрерывны снизу по первым переменным и полунепрерывны сверху по вторым.

Доказательство. Здесь полунепрерывность многозначных отображений A и B понимается в следующем смысле: отображение $A: R\to 2^X$ полунепрерывно сверху в точке $r_0\in R$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность точки r_0, в которой $\rho^*(A(r), A(r_0))<\varepsilon$. Полунепрерывность сверху отображения B понимается в том же смысле. Теперь докажем утверждение. Функции F, G определены по предыдущему утверждению. Докажем полунепрерывность функции F. Рассмотрим $s_0\in S$. Допустим противное, т.е. функция $F(r,s)$ не полунепрерывна сверху в точке s_0. Значит можно выбрать последовательность $s_n\to s_0$, для которой

$$F(r,s_n)\geq F(r,s_0)+\varepsilon, \tag{12}$$

для некоторого $\varepsilon>0$. Но отображение $B: S\to 2^Y$ полунепрерывно сверху в точке s_0, следовательно $B(s_n)\subset V_{\varepsilon_n}(B(s_0))$, где $\varepsilon_n\to 0$, при $n\to+\infty$. Здесь $V_{\varepsilon_n}(B(s_0))=\{y\in Y|\rho(y,B(s_0))<\varepsilon_n\}$. Рассмотрим функцию $g(y)=\min_{x\in A(r)} f(x,y)$. В силу утверждения она полунепрерывна сверху на Y. Функция $F(r,s)$ равна $\max_{y\in B(s)} g(y)$, следовательно $\max_{y\in B(s_n)} g(y) \geq \max_{y\in B(s_0)} g(y)+\varepsilon$ по неравенству (12). Значит существует последовательность $y_n\in B(s_n)$, такая, что $g(y_n)\geq \max_{y\in B(s_0)} g(y)+\varepsilon$. Но $B(s_n)\subset V_{\varepsilon_n}(B(s_0))$, следовательно $y_n\in V_{\varepsilon_n}(B(s_0))$. Поэтому можно выбрать последовательность $\hat{y}_n\in B(s_0)$, для которой выполняется $\rho(y_n,\hat{y}_n)<\varepsilon_n$. По условию B счетно-компактнозначное отображение, следовательно $B(s_0)$ счетно-компактное множество, поэтому существует подпоследовательность $\hat{y}_{n_k}$, сходящаяся к некоторой точке $\hat{y}_0\in B(s_0)$. Но

$\rho(y_{n_k}, \hat{y}_{n_k}) < \varepsilon_{n_k}$, значит $y_{n_k} \to \hat{y}_0$. Тогда $g(y_{n_k}) \geq \max_{y \in B(s_0)} g(y) + \varepsilon \geq g(\hat{y}_0) + \varepsilon$. Тем самым мы получаем противоречие, так как функция $g(y)$ должна быть полунепрерывна сверху в точке $\hat{y}_0$.

Теперь докажем полунепрерывность снизу функции $F(r, s)$ в произвольной точке $r_0 \in R$. Допустим противное, т.е. существует последовательность $r_n \to r_0$, для которой

$$F(r_n, s) \leq F(r_0, s) - \varepsilon, \tag{13}$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Отображение $A : R \to 2^X$ полунепрерывно сверху в точке r_0, поэтому $A(r_n) \subset V_{\varepsilon_n}(A(r_0))$. Из неравенства (13) получаем, что существует последовательность $x_n(y) \in A(r_n)$, для которой $f(x_n(y), y) \leq F(r_0, s) - \varepsilon$ при любом $y \in B(s)$. Но $x_n(y) \in V_{\varepsilon_n}(A(r_0))$, поэтому можно выбрать последовательность $\hat{x}_n(y) \in A(r_0)$, такую, что $\rho(x_n(y), \hat{x}_n(y)) < \varepsilon_n$. Но $A(r_0)$ счетно-компактное множество, следовательно существует подпоследовательность
$\hat{x}_{n_k}(y) \to \hat{x}_0(y) \in A(r_0)$. Таким образом $x_{n_k}(y) \to \hat{x}_0(y)$. Значит $f(x_{n_k}(y), y) \leq \max_{y \in B(s)} \min_{x \in A(r_0)} f(x, y) - \varepsilon$, для любого $y \in B(s)$. Существует $y_0 \in B(s)$, для которого $\max_{y \in B(s)} \min_{x \in A(r_0)} f(x, y) = \min_{x \in A(r_0)} f(x, y_0)$. Тогда $f(x_{n_k}(y_0), y_0) \leq \min_{x \in A(r_0)} f(x, y_0) - \varepsilon \leq f(\hat{x}_0(y_0), y_0) - \varepsilon$. Но $x_{n_k}(y_0) \to \hat{x}_0(y_0) \in A(r_0)$, следовательно мы получили противоречие с полунепрерывностью снизу функции $f(x, y_0)$ в точке $\hat{x}_0(y_0)$.

Доказательство полунепрерывности для функции $G(r, s)$ проводится аналогично.

Теперь вернемся к доказательству второй части утверждения . Будем проводить его по индукции, аналогично первой части. Так как значение игры полунепрерывно, то существует максимум платежной функции от соответствующих равновесных ситуаций (которые существуют по предположению индукции) по счетно-компактному множеству выбора на данном шаге. Далее доказательство аналогично.

Перейдем к рассмотрению динамических, антагонистических игр с полной информацией. Изучаемые ниже игры протекают в полных локально-компактных метрических пространствах X и Y (т.е. первый игрок выбирает траекторию в пространстве X, второй в пространстве Y). Но для упрощения изложения будем считать, что пространство одно (X), хотя все результаты справедливы для разных пространств с разными динамическими системами (все доказательства полностью аналогичны, только усложняются обозначения). Динамика игроков $\mathtt{I}$, $\mathtt{II}$ минимизирующего и соответственно максимизирующего, принимающих участие в этих играх, задается посредством обобщенных динамических систем $\mathcal{D}_{\mathtt{I}}$, $\mathcal{D}_{\mathtt{II}}$ в X. Обобщенная динамическая система $\mathcal{D}_l$, $l = \mathtt{I}$, $\mathtt{II}$ определяется при помощи семейства многозначных отображений пространства X на себя, обозначаемого через $\mathcal{D}_l(x^l, t)$, $l = \mathtt{I}$, $\mathtt{II}$, и называемого функцией достижимости игрока $l = \mathtt{I}, \mathtt{II}$. Интуитивно, $\mathcal{D}_l(x^l, t)$ есть множество точек пространства X, которые игрок l может достичь из начальной точки x^l за время $t \geq 0$. Функция $\mathcal{D}_l(x^l, t)$ предполагается удовлетворяющей следующим аксиомам.

1. $\mathcal{D}_l(x^l, t)$ определено для всяких $x^l \in X$, $t \geq 0$ и является непустым замкнутым подмножеством пространства X.

2. Начальное условие: $\mathcal{D}_l(x^l, 0) = x^l$ для всех $x^l \in X$.

3. Полугрупповое свойство: для всех чисел $t_1 \leq t_2$, $x_0^l \in X$

$$\mathcal{D}_l(x_0^l, t_2) = \bigcup_{x_1^l \in \mathcal{D}_l(x_0^l, t_1)} \mathcal{D}_l(x_1^l, t_2 - t_1).$$

4. Для любой точки $x^l \in X$ и $t_0 \geq 0$ существует $x_0 \in X$, такой, что $x^l \in \mathcal{D}_l(x_0, t_0)$.

5. $\mathcal{D}_l(x^l, t)$ непрерывна по t в метрике (отклонения).

6. Для любой точки $x^l \in X$ и для любых вещественных чисел t_0, t_1, t_2 функция $\mathcal{F}_l(x^l, t_0, t) = \mathcal{D}_l(x^l, t - t_0)$, определенная при всех $t \geq t_0$, является полунепрерывной сверху по (x^l, t_0), равномерно на отрезке $T = [t_1, t_2]$.

Функция $\hat{x}^l : [t_0, t_1] \to X$ называется траекторией обобщенной динамической системы (ОДС) $\mathcal{D}_l$, если для $t_0 \leq \tau_0 \leq \tau_1 \leq t_1$, $\hat{x}^l(\tau_1) \in \mathcal{D}_l(\hat{x}(\tau_0), \tau_1 - \tau_0)$. Можно показать, что траектория непрерывна. Для любой точки $y^l \in \mathcal{D}_l(x^l, t)$ при всяких $x^l \in X$, $t \in [0, \infty)$ найдется траектория ОДС $\mathcal{D}_l$ на отрезке $[0, t]$, исходящая из точки x^l и заканчивающаяся в точке y^l. Обозначим через $\hat{\mathcal{D}}_l(x^l, t)$ множество всех траекторий ОДС $\mathcal{D}_l$ на интервале $[0, t]$, исходящих из точки $x^l \in X$. Известно, что $\hat{\mathcal{D}}_l(x^l, t)$ счетно-компактно в равномерной метрике $\hat{\rho}_t$

$$\hat{\rho}_t(\hat{x}^l, \hat{y}^l) = \max_{\tau \in [0,t]} \{\rho(\hat{x}^l(\tau), \hat{y}^l(\tau))\}.$$

Обозначим через Σ_T множество конечных разбиений σ интервала $[0,T]$, $T<\infty$

$$\sigma = \{0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N_\sigma} = T\}.$$

Рассматриваемая ниже игра $\Gamma(x_0^{\mathtt{I}}, x_0^{\mathtt{II}}, T)$ является игрой с полной информацией. Именно, в каждый момент $t \in [0,T]$ времени игры каждому игроку известны позиции обоих игроков – точки $\hat{x}^l(t)$, $l = \mathtt{I},\ \mathtt{II}$, а также динамические возможности обоих игроков, определяемые функциями $\mathcal{D}_l,\ l = \mathtt{I},\ \mathtt{II}$. Известна также продолжительность игры $T < \infty$. Определим теперь стратегии игроков в игре $\Gamma(x^1, x^2, T)$.

Стратегией φ_l игрока l в игре $\Gamma(x_0^{\mathtt{I}}, x_0^{\mathtt{II}}, T)$ называется пара $(\sigma_{\varphi_l}, K_\sigma^l)$, где $\sigma_{\varphi_l} \in \Sigma_T$, а K_σ^l – отображение, ставящее в соответствие паре позиций

$$\hat{x}_{t_k}^{\mathtt{I}} \in \hat{\mathcal{D}}_{\mathtt{I}}(x_0^{\mathtt{I}}, t_k), \quad \hat{x}_{t_k}^{\mathtt{II}} \in \hat{\mathcal{D}}_{\mathtt{II}}(x_0^{\mathtt{II}}, t_k), \quad t_k \in \sigma_{\varphi_l} = \sigma_l$$

игроков, реализовавшихся к моменту t_k, траекторию

$$\hat{x}_{t_{k+1}-t_k}^l \in \hat{\mathcal{D}}_l(\hat{x}_{t_k}^l(t_k), t_{k+1} - t_k).$$

Множество всех стратегий игрока l в игре $\Gamma(x_0^{\mathtt{I}}, x_0^{\mathtt{II}}, T)$ обозначим через $\Phi_l,\ l = \mathtt{I}, \mathtt{II}$.

Пара $(\varphi_{\mathtt{I}}, \varphi_{\mathtt{II}}) = \big((\sigma_{\varphi_{\mathtt{I}}}, K_{\sigma_{\mathtt{I}}}^{\mathtt{I}}),\ (\sigma_{\varphi_{\mathtt{II}}}, K_{\sigma_{\mathtt{II}}}^{\mathtt{II}})\big) \in \Phi_{\mathtt{I}} \times \Phi_{\mathtt{II}}$ называется ситуацией в игре $\Gamma(x_0^{\mathtt{I}}, x_0^{\mathtt{II}}, T)$.

Фиксируем теперь ситуацию $(\varphi_{\mathtt{I}}, \varphi_{\mathtt{II}}) \in \Phi_{\mathtt{I}} \times \Phi_{\mathtt{II}}$. Пусть

$$\sigma_{\mathtt{I}} = \{0 < t_1^{\mathtt{I}} < \ldots < t_{N_{\sigma_{\mathtt{I}}}}^{\mathtt{I}} = T\},$$

$$\sigma_{\mathtt{II}} = \{0 < t_1^{\mathtt{II}} < \ldots < t_{N_{\sigma_{\mathtt{II}}}}^{\mathtt{II}} = T\}.$$

Допустим для определенности, что $t_1^{\mathtt{I}} \le t_1^{\mathtt{II}}$. Тогда в соответствии с определением стратегии частичные траектории игроков $\mathtt{I},\ \mathtt{II}$ на отрезках $[0, t_1^{\mathtt{I}}]$ и соответственно $[0, t_1^{\mathtt{II}}]$ суть образы при отображениях $K_{\sigma_{\mathtt{I}}}^{\mathtt{I}},\ K_{\sigma_{\mathtt{II}}}^{\mathtt{II}}$.

Именно

$$\hat{x}_{t_1^l}^l = K_{\sigma_l}^l(x_0^{\mathtt{I}}, x_0^{\mathtt{II}}), \quad l = \mathtt{I},\ \mathtt{II}.$$

Аналогично имеем

$$\hat{x}^l[\hat{x}_{t_1^l}^l(t_1^l), t_2^l] = K_{\sigma_l}^l(\hat{x}_{t_j^{\mathtt{I}}}^{\mathtt{I}}(t_1^l),\ \hat{x}_{t_1^{\mathtt{II}}}^{\mathtt{II}}(t_1^l)),$$

где

$$j = \begin{cases} 1 & \text{при } l = \mathtt{I}, \\ 2 & \text{при } l = \mathtt{II}, \end{cases}$$

$$(\hat{x}^l[\hat{x}^l_{t^l_1}(t^l_1), t^l_2] \in \hat{\mathcal{D}}_l(\hat{x}^l_{t^l_1}(t^l_1), t^l_2 - t^l_1)).$$

Таким образом, последовательно на интервалах $[t^l_k, t^l_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, N_{\sigma_l} - 1$, $l = \mathtt{I}$, $\mathtt{II}$ строим траектории $\hat{x}^l_T = \hat{x}^l[x^l_0, T]$, причем на каждом таком интервале в качестве начальных точек частичных траекторий берутся конечные точки уже построенных частичных траекторий на предыдущих интервалах, и вся траектория $\hat{x}^l[x^l_0, T]$ "склеивается" из таких частичных траекторий. В силу однозначности отображений $K^l_{\sigma_l}$, $l = \mathtt{I}$, $\mathtt{II}$ полученные таким образом траектории игроков $\mathtt{I}$, $\mathtt{II}$ единственны, иначе говоря, получающееся отображение

$$\chi : \ \Phi_{\mathtt{I}} \times \Phi_{\mathtt{II}} \to \hat{\mathcal{D}}_{\mathtt{I}}(x^{\mathtt{I}}_0, T) \times \hat{\mathcal{D}}_{\mathtt{II}}(x^{\mathtt{II}}_0, T)$$

однозначно.

Чтобы полностью определить игру $\Gamma(x^{\mathtt{I}}_0, x^{\mathtt{II}}_0, T)$ в нормальной форме, нам осталось определить функции выигрыша на множестве $\Phi_{\mathtt{I}} \times \Phi_{\mathtt{II}}$. Пусть на произведении $X \times X$ определена полунепрерывная снизу по первой переменной и сверху по второй функция $H : X \times X \to R^1$. В игре $\Gamma(x^{\mathtt{I}}_0, x^{\mathtt{II}}_0, T)$ всякой ситуации $(\varphi_{\mathtt{I}}, \varphi_{\mathtt{II}}) = \varphi$ ставится в соответствие величина (называемая выигрышем игрока $\mathtt{II}$)

$$H_1(\varphi) = H(\chi(\varphi)(T)) = \bar{H}_1(\chi(\varphi)).$$

В этой игре игрок $\mathtt{II}$, выбирая стратегию $\varphi_{\mathtt{II}}$ стремится максимизировать свой выигрыш, цель игрока $\mathtt{I}$ противоположна.

З а м е ч а н и е. В рассмотренных выше стратегиях разбиение интервала $[0, T]$ игры σ выбиралось игроком до начала игры. В некоторых случаях бывает удобно избавиться от этого ограничения и позволить игроку выбирать точку t_{k+1} разбиения σ в момент t_k предполагая, что результирующее разбиение σ принадлежит множеству Σ_T конечных разбиений $[0, T]$. В дальнейшем изложении ничего не изменится, если используемые стратегии считать стратегиями именно такого типа. Мы будем называть их кусочно-программными стратегиями с нефиксированным заранее разбиением интервала игры, стратегии же первого типа будем называть просто кусочно-программными стратегиями.

Введем теперь в рассмотрение вспомогательные к игре $\Gamma(x_0^{\mathtt{I}}, x_0^{\mathtt{II}}, T)$ игры $\underline{\Gamma}^{\sigma}(x_0^{\mathtt{I}}, x_0^{\mathtt{II}}, T)$ и $\bar{\Gamma}^{\sigma}(x_0^{\mathtt{I}}, x_0^{\mathtt{II}}, T)$, которые назовем соответственно нижними и верхними для игры $\Gamma^{\sigma}(\cdot)$. Здесь $\sigma \in \Sigma_T$. Из соображений простоты и краткости изложения будем далее разбиение $\sigma = \sigma_n$ считать двоичным, $t_{k+1} - t_k = \frac{T}{2^n}$, $k = \overline{0, 2^n - 1}$ множество таких разбиений обозначим через Σ_T^2. Динамика игроков $\mathtt{I}$, $\mathtt{II}$ во всех вспомогательных играх $\bar{\Gamma}(\cdot)$, $\underline{\Gamma}(\cdot)$ та же самая, что и в основных играх $\Gamma(\cdot)$ и определяется посредством ОДС $\mathcal{D}_{\mathtt{I}}$, $\mathcal{D}_{\mathtt{II}}$.

Пусть теперь разбиение $\sigma_n \in \Sigma_T^2$ фиксировано. Игра $\underline{\Gamma}^{\sigma}(x_0^{\mathtt{I}}, x_0^{\mathtt{II}}, T)$ протекает следующим образом. В момент $t_0 = 0$ игрок $\mathtt{II}$, зная начальные позиции обоих игроков $x_0^{\mathtt{I}}$, $x_0^{\mathtt{II}}$, выбирает траекторию $\hat{x}^{\mathtt{II}}[x_0^{\mathtt{II}}, t_1]$, $t_1 = \delta_n = T/2^n$. Игрок $\mathtt{I}$, зная кроме начальных позиций игроков $\mathtt{I}$, $\mathtt{II}$ также траекторию $\hat{x}^{\mathtt{II}}[x_0^{\mathtt{II}}, t_1]$, выбранную игроком $\mathtt{II}$, выбирает в свою очередь траекторию $\hat{x}^{\mathtt{I}}[x_0^{\mathtt{I}}, t_1]$. На втором шаге в момент времени t_1 игрок $\mathtt{II}$, зная траектории $\hat{x}^{l}[x_0^{l}, t_1]$, $l = \mathtt{I}, \mathtt{II}$, выбирает траекторию на следующем интервале времени $[t_1, t_2]$ – $\hat{x}^{\mathtt{II}}[x_1^{\mathtt{II}}, \delta_n]$, а игрок $\mathtt{I}$, зная траектории $\hat{x}^{\mathtt{II}}[x_0^{\mathtt{II}}, t_2]$, $\hat{x}^{\mathtt{I}}[x_0^{\mathtt{I}}, t_1]$, выбирает траекторию $\hat{x}^{\mathtt{I}}[x_1^{\mathtt{I}}, \delta_n]$. Аналогичным образом процесс продолжается до момента T, в который игра заканчивается, и игрок $\mathtt{II}$ получает от игрока $\mathtt{I}$ выигрыш, равный величине $\bar{H}_1(\hat{x}_T^{\mathtt{I}}, \hat{x}_T^{\mathtt{II}})$ в игре $\underline{\Gamma}^{\sigma_n}(x_0^{\mathtt{I}}, x_0^{\mathtt{II}}, T)$. Здесь $(\hat{x}_T^{\mathtt{I}}, \hat{x}_T^{\mathtt{II}})$ траектория, реализовавшаяся в игре $\underline{\Gamma}^{\sigma_n}(\cdot)$.

Игра $\bar{\Gamma}^{\sigma_n}(\cdot)$, $i = 1, 2$ протекает двойственным образом. Заметим, что игрокам предполагаются известными условия игры – динамика игроков, продолжительность игры, разбиение σ_n.

Стратегией $\bar{\varphi}^{\mathtt{I}_\sigma}(\underline{\varphi}_i^{\mathtt{II}_\sigma})$ игрока $\mathtt{I}(\mathtt{II})$ в игре $\bar{\Gamma}^{\sigma}(\cdot)(\underline{\Gamma}^{\sigma}(\cdot))$ называется отображение, ставящее в момент времени $t_k \in \sigma_n$, $k = 0, \ldots, N_\sigma - 1$ в соответствие паре траекторий

$$(\hat{x}^{\mathtt{I}}[x_0^{\mathtt{I}}, t_k], \hat{x}^{\mathtt{II}}[x_0^{\mathtt{II}}, t_k]) \in \mathcal{D}_{\mathtt{I}}(\cdot) \times \mathcal{D}_{\mathtt{II}}(\cdot)$$

траекторию

$$\hat{x}^{\mathtt{I}}[x_k^{\mathtt{I}}, \delta_n] \qquad (\hat{x}^{\mathtt{II}}[x_k^{\mathtt{II}}, \delta_n]).$$

Стратегией $\underline{\varphi}^{\mathtt{I}_\sigma}(\bar{\varphi}^{\mathtt{II}_\sigma})$ игрока $\mathtt{I}(\mathtt{II})$ в игре $\underline{\Gamma}^{\sigma}(\cdot)(\bar{\Gamma}^{\sigma}(\cdot))$ называется отображение, ставящее в момент времени $t_k \in \sigma_n$, $k = 0, \ldots, N_\sigma - 1$ в соответствие паре траекторий

$$(\hat{x}^{\mathtt{I}}[x_0^{\mathtt{I}}, t_k],\ \hat{x}^{\mathtt{II}}[x_0^{\mathtt{II}}, t_{k+1}])\ ((\hat{x}^{\mathtt{I}}[x_0^{\mathtt{I}}, t_{k+1}], \hat{x}^{\mathtt{II}}[x_0^{\mathtt{II}}, t_k]))$$

траекторию

$$\hat{x}^{\mathtt{I}}[x_k^{\mathtt{I}}, \delta_n] \qquad (\hat{x}^{\mathtt{II}}[x_k^{\mathtt{II}}, \delta_n]).$$

Множество стратегий игрока l в игре $\underline{\Gamma}^\sigma(\cdot)$ $(\bar{\Gamma}^\sigma(\cdot))$ будем обозначать через $\underline{\Phi}_l^\sigma$ $(\bar{\Phi}_l^\sigma)$.

Как и в случае игры $\Gamma(\cdot)$ из определения игр $\bar{\Gamma}^\sigma(\cdot)$ $\underline{\Gamma}^\sigma(\cdot)$ следует, что всякой ситуации $\bar{\varphi}^\sigma$, $\underline{\varphi}^\sigma$ единственным образом соответствует траектория игры $\bar{\Gamma}^\sigma(\cdot)$ $\underline{\Gamma}^\sigma(\cdot)$

$$(\hat{x}^{\mathtt{I}}[x_0^{\mathtt{I}},T],\ \hat{x}^{\mathtt{II}}[x_0^{\mathtt{II}},T])^-, \quad (\hat{x}^{\mathtt{I}}[x_0^{\mathtt{I}},T],\ \hat{x}^{\mathtt{II}}[x_0^{\mathtt{II}},T])_-;$$

обозначим это соответствие

$$\bar{\chi}^\sigma \ : \ \bar{\Phi}_{\mathtt{I}}^\sigma \times \bar{\Phi}_{\mathtt{II}}^\sigma \to \mathcal{D}_{\mathtt{I}}(\cdot) \times \mathcal{D}_{\mathtt{II}}(\cdot);$$

$$\underline{\chi}^\sigma \ : \ \underline{\Phi}_{\mathtt{I}}^\sigma \times \underline{\Phi}_{\mathtt{II}}^\sigma \to \mathcal{D}_{\mathtt{I}}(\cdot) \times \mathcal{D}_{\mathtt{II}}(\cdot).$$

Далее при доказательстве теорем существования ситуаций равновесия в играх $\Gamma(\cdot)$ нам понадобится вспомогательная игра $\hat{\Gamma}^\sigma(\cdot)$ являющаяся усечением игры $\bar{\Gamma}^\sigma(\cdot)$ на последнем шаге. Эта игра отличается от игры $\bar{\Gamma}^\sigma(\cdot)$ лишь тем, что в ней на последнем N_σ-ом шаге игрок $\mathtt{II}$ не совершает выбора траектории $\hat{x}^{\mathtt{II}}[x_{N_\sigma-1},\delta_n]$.

Чтобы избежать далее громоздких обозначений, условимся множество $\hat{\mathcal{D}}_l(x_k^l,t_{k+1})$ обозначать через $\hat{\mathcal{D}}_l^k=\{\hat{x}_k^l\}$ $l=\mathtt{I},\ \mathtt{II}$, и вместо $\hat{x}_k^l(t_{k+1})$ писать просто x_{k+1}^l.

Лемма 1.7. *В играх* $\bar{\Gamma}^\sigma(x_0^{\mathtt{I}},x_0^{\mathtt{II}},T)$, $\underline{\Gamma}^\sigma(\cdot)$, $\hat{\Gamma}^\sigma(\cdot)$ *существуют седловые точки в чистых стратегиях, функция значения* $Val(\bar{\Gamma}^\sigma(\cdot))$, $Val(\underline{\Gamma}^\sigma(\cdot))$, $Val(\hat{\Gamma}^\sigma(\cdot))$ *полунепрерывна по* $x_0^{\mathtt{I}}$, $x_0^{\mathtt{II}}$ *снизу и сверху соответственно. Для всякого разбиения* $\sigma\in\Sigma_T^2$ *справедливо неравенство*

$$Val(\bar{\Gamma}^\sigma(x_0^{\mathtt{I}},x_0^{\mathtt{II}},T))\geq Val(\underline{\Gamma}^\sigma(x_0^{\mathtt{I}},x_0^{\mathtt{II}},T)). \tag{14}$$

Доказательство. Рассмотрим игру $\underline{\Gamma}^\sigma(\cdot)$. Покажем, что имеет смысл следующая система функциональных уравнений

$$Val(\underline{\Gamma}^\sigma(x_0^{\mathtt{I}},x_0^{\mathtt{II}},T))=\overset{\odot}{\int\limits_{\hat{x}_0^{\mathtt{II}}\in\hat{\mathcal{D}}_{\mathtt{II}}^0}} d\mu_{\hat{0}} \overset{\oplus}{\int\limits_{\hat{x}_0^{\mathtt{I}}\in\hat{\mathcal{D}}_{\mathtt{I}}^0}} Val(\underline{\Gamma}^\sigma(x_1^{\mathtt{I}},x_1^{\mathtt{II}},T-\delta_n))d\mu_{\hat{1}};$$

$$-\ -$$

$$Val(\underline{\Gamma}^\sigma(x_{N_\sigma-1}^{\mathtt{I}},x_{N_\sigma-1}^{\mathtt{II}},\delta_n))=$$
$$=\overset{\odot}{\int\limits_{\hat{x}_{N_\sigma-1}^{\mathtt{II}}\in\hat{\mathcal{D}}_{\mathtt{II}}^{N_\sigma-1}}} d\mu_{\hat{0}} \overset{\oplus}{\int\limits_{\hat{x}_{N_\sigma-1}^{\mathtt{I}}\in\hat{\mathcal{D}}_{\mathtt{I}}^{N_\sigma-1}}} H(x_{N_\sigma}^{\mathtt{I}},x_{N_\sigma}^{\mathtt{II}})d\mu_{\hat{1}}. \tag{15}$$

Так как $\hat{\mathcal{D}}_l^{N_\sigma-1}$, $l = \mathtt{I}, \mathtt{II}$ счетно-компактны, то применяя утверждение к функции $H(\hat{x}^{\mathtt{I}}_{N_\sigma-1}, \hat{x}^{\mathtt{II}}_{N_\sigma-1}) = H(x^{\mathtt{I}}_{N_\sigma}, x^{\mathtt{II}}_{N_\sigma})$ получаем, что функция $Val(\underline{\Gamma}^\sigma(x^{\mathtt{I}}_{N_\sigma-1}, x^{\mathtt{II}}_{N_\sigma-1}, \delta_n))$ полунепрерывна. Рассуждая далее аналогичным образом по индукции получаем на последнем шаге, что функция $Val(\underline{\Gamma}^\sigma(x^{\mathtt{I}}_0, x^{\mathtt{II}}_0, T))$ полунепрерывна по $x^{\mathtt{I}}_0$, $x^{\mathtt{II}}_0$.

Точно так же показывается, что система функциональных уравнений для игры $\bar{\Gamma}^\sigma(x^{\mathtt{I}}_0, x^{\mathtt{II}}_0, T)$

$$Val(\bar{\Gamma}^\sigma(x^{\mathtt{I}}_0, x^{\mathtt{II}}_0, T)) = \overset{\oplus}{\int\limits_{\hat{x}^{\mathtt{I}}_0 \in \hat{\mathcal{D}}^0_{\mathtt{I}}}} d\mu_{\hat{1}} \overset{\odot}{\int\limits_{\hat{x}^{\mathtt{II}}_0 \in \hat{\mathcal{D}}^0_{ttII}}} Val(\bar{\Gamma}^\sigma(x^{\mathtt{I}}_1, x^{\mathtt{II}}_1, T - \delta_n)) d\mu_{\hat{0}};$$

$$-\;-$$

$$Val(\bar{\Gamma}^\sigma(x^{\mathtt{I}}_{N_\sigma-1}, x^{\mathtt{II}}_{N_\sigma-1}, \delta_n)) =$$

$$= \overset{\oplus}{\int\limits_{\hat{x}^{ttI}_{N_\sigma-1} \in \hat{\mathcal{D}}^{N_\sigma-1}_{\mathtt{I}}}} d\mu_{\hat{1}} \overset{\odot}{\int\limits_{\hat{x}^{ttII}_{N_\sigma-1} \in \hat{\mathcal{D}}^{N_\sigma-1}_{ttII}}} H(x^{\mathtt{I}}_{N_\sigma}, x^{\mathtt{II}}_{N_\sigma}) d\mu_{\hat{0}}. \tag{16}$$

имеет смысл и что функция $Val(\bar{\Gamma}^\sigma(x^{\mathtt{I}}_0, x^{\mathtt{II}}_0, T))$ полунепрерывна по $x^{\mathtt{I}}_0$, $x^{\mathtt{II}}_0$.

Дальнейший ход доказательства следует изложению в [1].

Лемма 1.8. *Для всякой пары разбиений $\sigma, \sigma' \in \Sigma_T$, такой что σ' является измельчением σ,*

$$Val(\bar{\Gamma}^\sigma(x^{\mathtt{I}}_0, x^{\mathtt{II}}_0, T)) \geq Val(\bar{\Gamma}^{\sigma'}(x^{\mathtt{I}}_0, x^{\mathtt{II}}_0, T)),$$

$$Val(\underline{\Gamma}^\sigma_i(x^{\mathtt{I}}_0, x^{\mathtt{II}}_0, T)) \leq Val(\underline{\Gamma}^{\sigma'}(x^{\mathtt{I}}_0, x^{\mathtt{II}}_0, T)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. [1].

Теперь предположим, что функция .выигрыша H непрерывна (а не полунепрерывна) и обобщенные динамические системы (ОДС) непрерывны в метрике отклонения по совокупности переменных.

Лемма 1.9. *Для всякой последовательности $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ разбиений интервала $[0, T]$, $\sigma \in \Sigma^2_T$, такой что $|\sigma_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$*

$$\lim_{n\to\infty} Val(\bar{\Gamma}^{\sigma_n}(x^{\mathtt{I}}_0, x^{\mathtt{II}}_0, T)) = \lim_{n\to\infty} Val(\underline{\Gamma}^{\sigma_n}(x^{\mathtt{I}}_0, x^{\mathtt{II}}_0, T)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. [1].

Лемма 1.10. *Для всяких последовательностей* $\{\sigma'_n\}_1^\infty$, $\{\sigma_n\}_1^\infty$, $\sigma_n, \sigma'_n \in \Sigma_T$, *таких что* $|\sigma_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $|\sigma'_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} Val(\bar{\Gamma}^{\sigma_n}(x_0^{\mathrm{I}}, x_0^{\mathrm{II}}, T)) = \lim_{n\to\infty} Val(\bar{\Gamma}^{\sigma'_n}(x_0^{\mathrm{I}}, x_0^{\mathrm{II}}, T)).$$

Доказательство. См. [1].

Теорема 1.2. *При всяких* $x_0^{\mathrm{I}}, x_0^{\mathrm{II}} \in X, T < \infty$ *в игре* $\Gamma(x_0^{\mathrm{I}}, x_0^{\mathrm{II}}, T)$ *для всякого* $\varepsilon > 0$ *существуют ситуации* ε*-равновесия, причем*

$$Val(\Gamma(x_0^{\mathrm{I}}, x_0^{\mathrm{II}}, T)) = \lim_{n\to\infty} Val(\bar{\Gamma}^{\sigma_n}(x_0^{\mathrm{I}}, x_0^{\mathrm{II}}, T)),$$

где $\{\sigma_n\}_1^\infty$ *– любая измельчающаяся последовательность разбиений* $[0, T]$, $|\sigma_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Доказательство. См. [1].

2. Дифференциальные игры бесконечной длительности

Рассмотрим конечное множество M и циклический автоморфизм $T : M \to M$. Пусть также $f : M \to R_1$ – вещественная функция. Рассмотрим итерации $T^n : M \to M$ и возникающие функции $f(T^n x)$.

Обозначим

$$\int\limits_M f \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m} \sum_{x\in M} f(x), \quad |M| = m.$$

Полагаем для простоты изложения, что существует один цикл, так что $T^m = Id = E$ – тождественный автоморфизм. Обозначим через x_0 начальную точку. Тогда справедливо следующее

Утверждение 2.1.

$$\frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} f\big(T^l(x_0)\big) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sum_{p=1}^{l} f\big(T^p(x_0)\big) = \int\limits_M f \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m} \sum_{x\in M} f(x) \quad (*)$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим произвольное $l > m$. Тогда существует такое $k > 0$, $k \in N$, что $l = km + r(l)$, где $0 \le r(l) < m$ при всяком l. Разложим в (*) правую часть на два слагаемых:

$\frac{1}{l}\sum_{p=1}^{l} f\big(T^p(x_0)\big) = \frac{1}{km+r(l)}\sum_{p=1}^{km+r(l)} f\big(T^p(x_0)\big) =$
$= \frac{1}{km+r(l)}\left[\sum_{p=1}^{km} f(x_p) + \sum_{i=1}^{r(l)} f(x_i)\right] =$
$= \frac{1}{km+r(l)}\left[k\sum_{i=1}^{m} f(x_i) + \sum_{i=1}^{r(l)} f(x_i)\right] =$
$= k\frac{\sum_{i=1}^{m} f(x_i)}{km+r(l)} + \frac{\sum_{i=1}^{r(l)} f(x_i)}{km+r(l)} =$
$= k\frac{\mu}{km+r(l)} + \frac{\sum_{i=1}^{r(l)} f(x_i)}{km+r(l)} = \mu\frac{k}{km+r(l)} + \frac{\sum_{i=1}^{r(l)} f(x_i)}{km+r(l)} =$
$= \mu\frac{1}{m+r(l)/k} + \frac{\sum_{i=1}^{r(l)} f(x_i)}{km+r(l)} \to \frac{\mu}{m}.$

Рассмотрим теперь преобразование T, зависящее от параметра u, $T = T(x,u)$, причем предполагаем, что u принимает значения из конечного множества $U(x)$. Будем для простоты изложения считать, что для всякого выбора значений $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x)$ во всех точках M (синтезирующее управление) реализуется автоморфизм (циклический). Поэтому для любого $\mathcal{U}$ имеем снова соотношение:

$\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} f\big(T^l(x,U_l)\big) = \int\limits_M f = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} f\big(T^l(x_0,\mathcal{U})\big) =$

$$= \lim \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{\infty} f\big(T^l(x_0,\mathcal{U})\big) \qquad (**)$$

Здесь значение выражения

$$\sum_{l=0}^{m-1} f\big(T(x,U_l)\big)$$

получается индуктивно следующим образом. В начальной точке $x = x_0$ выбираем значение $u_0 = \mathcal{U}(x_0)$ и система переходит из x_0 в $x_1 = T(x_0, u(x_0))$, затем в точке x_1 выбираем значение $u_1 = \mathcal{U}(x_1)$ и система переходит из точки x_1 в точку $x_2 = T(x_1, u(x_1))$. На последнем шаге система приходит в точку x_0, при этом, очевидно выполняется соотношение (**).

Рассмотрим теперь случай, когда $T = t(x,u,v)$, $u(x)$, $v(x)$ принимают значения из конечных множеств $U(x)$, $V(x)$.

Можно представить себе наличие двух игроков (агентов), выбирающих на каждом шаге допустимое значение $u(x)$, $v(x)$, преследующих при этом цели: первый - минимизацию накопленной за $k \le m$ шагов суммы $\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} f\big(T(x_l,u_l,v_l)\big)$, второй - максимизацию этой величины.

Из вышесказанного следует, что если процесс длины m шагов, то указанная сумма будет принимать одно и то же значение при любых стратегиях - выборах управляющих параметров $u(x)$, $v(x)$ обоими агентами.

$\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} f\big(T(x_l,u_l,v_l)\big) = \int\limits_M f = \frac{1}{m}\sum_{x\in M} f(x) =$
$= \max_{\{\mathcal{U}\}}\min_{\{\mathcal{V}\}} \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} f\big(T(x_l,u_l,v_l)\big) =$
$= \min_{\{\mathcal{V}\}}\max_{\{\mathcal{U}\}} \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} f\big(T(x_l,u_l,v_l)\big).$

Здесь $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ суть множества всех допустимых стратегий агентов I и II в $m-$ шаговых процессах (с памятью или без памяти).

З а м е ч а н и е. В процессе длины $k < m$ это не так.

Рассмотрим теперь случай n агентов.

Преобразование T зависит, в каждой точке $x \in M$ от n параметров $u_1(n), ..., u_n(x)$, принимающих значения из множеств $U_1(x), ..., U_n(x)$, $T = T(x, u_1, ..., u_n) = T(x, u)$, причем здесь опять полагаем, что при любом выборе u_i в точке $x \in M$ реализуется циклический процесс - автоморфизм T множества M.

На M определены n функций качества $f_1, ..., f_n$ агентов, которые стремятся выбором управления $u_i(x)$ максимизировать сумму за m шагов.

Рассуждая, как и выше, получаем

$$\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} f_i\big(T(x_l,u^l)\big) = \int\limits_M f_i = \frac{1}{m}\sum_{x\in M} f_i(x).$$

Здесь $u^l = (u_1^l, ..., u_n^l)$.

Иначе

$$\mathrm{Val}_{\{\mathcal{U}_1\}\dots\{\mathcal{U}_n\}}\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} f\big(T(x_l,u^l)\big) = \int\limits_M f = \frac{1}{m}\sum_{x\in M} f_i(x).$$

Здесь $f = (f_1, ..., f_n)$, $\mathrm{Val}_{\{\mathcal{U}_1\}\dots\{\mathcal{U}_n\}}$ – значение выигрыша агентов в равновесных ситуациях в игре n лиц над множеством стратегий $\mathcal{U}_1, ...\mathcal{U}_n$ в $m-$ шаговом процессе с векторной функцией выигрыша $\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} f\big(T(x_l,u^l)\big)$.

З а м е ч а н и е. Для процессов меньшей длительности это не имеет места.

Перейдем теперь к более общим рассмотрениям.

Напомним вначале некоторые сведения о пространствах Лебега и измеримых разбиениях.

Пусть $(M, \Sigma, \mu)-$пространство с нормированной полной мерой μ, то есть для любого множества $A \in \Sigma$, где $\mu A = 0$, любое $B \subset A$ также лежит в Σ. Для любого семейства $\{B_\alpha\}$, $B_\alpha \in \Sigma$ обозначим $F(\{B_\alpha\})$ борелевское тело множеств, порожденное всеми B_α.

Говорят, что система измеримых множеств $\mathcal{B} = \{b_i, i \in I\}$ является базисом пространства M, если выполняются два свойства. Во-первых, для любого $A \in \Sigma$ существует такое множество $C \in F(\mathcal{B})$, что $A \subset C$,
$\mu(C \backslash A) = 0$, и во-вторых, для любой пары точек $x_1, x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2$ существует $i \in I$ такое, что или $x_1 \in B_i$, $x_2 \notin B_i$ или $x_2 \in B_i$, $x_1 \notin B_i$.

Пусть теперь фиксированный базис $\mathcal{B} = \{B_i\}$ и $e_i = \pm 1$. $B_i^{(e_i)} = B_i$, если $e_i = 1$, и $B_i^{(e_i)} = M \setminus B_i$, если $e_i = -1$.

Всякому набору чисел $\{e_i, i \in I\}$ сопоставим пересечение $\bigcap_{i \in I} B_i^{e_i}$. По второму свойству любое такое пересечение содержит не более одной точки.

Назовем пространство (M, Σ, μ) полным относительно базиса $\mathcal{B}$, если все пересечения $\bigcap_{i \in I} B_i^{e_i}$ не пусты.

Скажем, что (M, Σ, μ) полно (mod0) относительно базиса $\mathcal{B}$, если M можно включить в качестве подмножества меры 1 в некоторое пространство с мерой $(\bar{M}, \bar{\Sigma}, \bar{\mu})$ полное относительно такого базиса $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{B}_i, i \in I\}$, что $\bar{B}_i \bigcap M = B_i$ для всех $i \in I$.

Известно, что любое пространство полное (mod0) относительно одного базиса, также полно (mod0) относительно любого другого базиса.

Пространство (M, Σ, μ) полное (mod0) относительно некоторого базиса называется *пространством Лебега.*

Известно, что любое полное сепарабельное метрическое пространство, в котором задана мера на борелевской $\sigma-$ алгебре, является пространством Лебега. Прямое произведение конечного или счетного числа пространств Лебега также есть пространство Лебега.

Разбиением пространства (M, Σ, μ) называется множество $\xi = \{C\}$ непересекающихся измеримых подмножеств C, таких, что $\bigcup_{C \in \xi} = M$. Если $\bigcup_{C \in \xi} = M$ (mod0), то ξ, есть разбиение (mod0).

Множества $A \in \Sigma$, которые суть объединения элементов $C_\xi \in \xi$ называются измеримыми относительно ξ.

Разбиение ξ называется измеримым, если существует такая счетная система множеств $\mathcal{B} = \{B_i, i \in I\}$ измеримых относительно ξ таких что для любых $C_1, C_2 \in \xi$ существует $i \in I$, для которого $C_1 \in B_i$, $C_2 \notin B_i$ или $C_2 \in B_i$, $C_1 \notin B_i$.

Известно, что фактор-пространство $M \setminus \xi$ пространства M Лебега по измеримому разбиению ξ есть пространство Лебега.

Пусть теперь (M, Σ, μ) - измеримое пространство Лебега с $\sigma-$алгеброй Σ и нормированной мерой μ, которая предполагается полной, а $T : M \to M$ автоморфизм. Рассматривается последовательность конечных разбиений $\{\xi_n\}$ пространства M и автоморфизмов $\{T_n\}$, таких что T_n сохраняет ξ_n, то есть переводит элементы ξ_n снова в элементы ξ_n, которые обозначим через $C_j^{(n)}$, $j_n = 1, ..., q_n$. Через $\Sigma(\xi_n)$ обозначим $\sigma-$ алгебру подмножеств M, состоящую (mod0) из элементов ξ_n, а через ξ_0 разбиение, состоящее из отдельных точек M. По определению $\xi_n \to \xi_0$, если для любого $A \in \Sigma$ существует последовательность $A_n \in \Sigma(\xi_n)$, такая что $\mu(A_n \Delta A) \to 0$.

Так как $|\xi_n|-$ число элементов ξ конечно, то для любого C_j^n при некоторых $r_j \leq q_n$ $T_n^{r_j} C_j^{(n)} = C_j^{(n)}$, то есть орбита $C_j^{(n)}$ конечна. Будем полагать, что $T_n^{r_j} x = x$ при $x \in C_j^{(n)}$, существует p_n наименьшее, при котором $T_n^{p_n} = \mathrm{Id}$.

Рассмотрим далее периодическую аппроксимацию автоморфизмов пространств Лебега.

Напомним вначале несколько определений.

Пусть $T-$ автоморфизм пространства с мерой (M, Σ, μ). Точка $x \in M$ называется *периодической точкой автоморфизма* T, если для некоторого $n \in Z = \{1, 2, ...\}$ $T^n x = x$.

Автоморфизм T называется *апериодическим*, если множество его периодических точек $\mathcal{P}(T, M)$ имеет меру нуль - $\mu\mathcal{P}(T, M) = 0$.

Обозначим через $\mathcal{L}$ множество пространств Лебега.

Лемма 2.1. *Пусть $T-$ апериодический автоморфизм пространства Лебега (M, Σ, μ). Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ и $n \in Z$ существует такое множество $E \in \Sigma$, что множества $E, TE, ..., T^{n-1}E$, попарно не пересекаются, и*

$$\mu(\bigcup_{i=0}^{n-1} T^i E) > 1 - \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. см. [3].

З а м е ч а н и е. Из построения E следует, что

$$\bigcup_{i=0}^{2n-1} T^i E = M.$$

Напомним определение. Пусть $g(n)$ стремится к нулю и убывает. Автоморфизм $T : M \to M$ допускает аппроксимацию первого рода периодическим преобразованием со скоростью $g(n)$, если существует такая последовательность разбиений $\xi_n \to \xi_0$ и последовательность автоморфизмов T_n, сохраняющих ξ_n такие, что

$$\sum_{i=1}^{q_n} \mu(TC_i^n \Delta T_n C_i^n) < f(q_n).$$

Говорят, что T допускает циклическую аппроксимацию периодическими преобразованиями со скоростью $f(n)$, если автоморфизм T допускает аппроксимацию первого рода периодическими преобразованиями и T_n циклически переставляет элементы разбиения ξ.

Лемма 2.2. *Для любого множества $E \in \Sigma$ и любого $k \in Z = \{0, 1, 2 \ldots\}$*

$$\mu(T^k E \Delta T_n^k E) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \mu(T(T_n^i E) \Delta T_n^{i+1} E).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. [3].

Предыдущая лемма означает, что любой автоморфизм можно аппроксимировать периодическими преобразованиями.

Теорема 2.1. *Любой автоморфизм T допускает аппроксимацию первого рода периодическими преобразованиями со скоростью $f(n) = a_n | \ln n$, где $\{a_n\}$– любая монотонно-растущая к бесконечности числовая последовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. [3].

О п р е д е л е н и е. Игра Г есть следующая совокупность:

$$< I = \{i\},\ (M, \Sigma, \mu),$$
$$\{u_i\} = U_i,\ T(x, u),\ f = \{f_i\}_{i \in I},\ S_i = \{s_i\}, S, P, F > .$$

Здесь I – множество агентов (игроков), M – пространство Лебега с мерой, U_i – множество допустимых управлений агента i (которое может зависеть от позиции $x \in M$), $T(x,u)$ – автоморфизм пространства M, зависящий от u, F – множество автоморфизмов M, S_i – множество стратегий агента i, S – множество допустимых ситуаций игры Γ, $P : S \to F$ – отображение, сопоставляющее ситуации $s \in S$ некоторый автоморфизм T пространства Лебега M, f_i – измеримая функция дохода агента i ($f_i : M \to R_1$).

Игра Γ протекает следующим образом. Каждый агент $i \in I$ выбирает число ε_i и стратегию s_i таким образом, что $\varepsilon = \inf_{i \in I} \varepsilon_i > 0$ и $s = \{s_i\} \in S$. В соответствии с правилом P выбирается автоморфизм $P(s) = T \in F$. Выбирается периодический автоморфизм T_ε, аппроксимирующий автоморфизм T с точностью до ε. Таким образом стратегия игрока i в игре Γ есть пара $\psi_i = (\varepsilon_i, s_i)$. В качестве начальной позиции возьмем "размытую точку" – некоторый элемент C_j^ε разбиения ξ аппроксимирующему автоморфизму T_ε. В качестве значения выигрыша агента i в этой "позиции"возьмем $\int\limits_{C_j^\varepsilon} f_i d\mu = f_j^\varepsilon$.

Средний выигрыш агента (игрока) i вдоль "размытой" траектории автоморфизма T_ε определим выражением

$$F_i(\psi) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{m=0}^{\infty} \int\limits_{T_\varepsilon^m (C_{j_0}^\varepsilon)} f_i(T_\varepsilon^m(C_{j_0}^\varepsilon)) d\mu. \qquad (***)$$

Утверждение 2.2. *Для всякого пространства Лебега M, автоморфизма T, измеримого разбиения ξ автоморфизма T_ε выражение в (***) справа имеет смысл, более того*

$$F_i(\psi) = \int\limits_M f_i d\mu.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство получаем путем непосредственного применения первого утверждения к конечному разбиению ξ.

Теорема 2.2. *В игре Γ для произвольного множества игроков I, произвольных измеримых функций выигрыша f_i, произвольного оператора P и произвольного $\varepsilon > 0$ существует ситуация ε - равновесия.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство непосредственно вытекает из первых двух утверждений. Также из первых двух утверждений и предыдущей теоремы вытекает:

Теорема 2.3. (О магистралях.) *Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое l, что в игре длиной l существует ситуация ε - равновесия, значения функции выигрыша в которой отличаются от равновесия не более чем на $\varepsilon > 0$.*

Указатель литературы

1. *Малафеев О.А.* Управляемые конфликтные системы. СПБГУ, 2000. 240 с.
2. *Маслов В.П.,Колокольцов В.Н.* Теория управления и идемпотентный анализ. М., Наука, 1994. 180 с.
3. *Корнфельд И.П. и др.* Эргодическая теория. М., Наука, 1980. 387 с.
4. *Петросян Л.А.* Дифференциальные игры преследования. Л., ЛГУ, 1977. 223 с.
5. *Н.Е. Кирин.* Методы оценивания и управления в динамических системах. СПб., 1993. 308 с.

Г.Г. Меньшиков

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЛОКАЛИЗУЮЩИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1. Введение

Локализующие вычисления — новое, весьма перспективное направление вычислительной математики. В тех случаях, когда числовые исходные данные к машинному расчету известны точно, а расчет имеет сугубо целочисленный характер и проводится по точным явным формулам, локализующие вычисления не нужны. Поскольку тогда машина в состоянии дать точный ответ на вопрос: чему равно?

В научно-технической практике гораздо чаще машина не в состоянии дать ответа на такой вопрос, так как точное значение искомой величины не выражается в машинных числах. Например, невозможно изобразить машинными числами бесконечную дробь, а потому большинство рациональных чисел не имеет точного машинного представления.

В этой типовой ситуации *традиционные методы вычислений* предусматривают ответ на другой вопрос: чему приблизительно равно? Но тогда они требуют ответа еще на один вопрос: насколько точен найденный машиной результат? Такой ответ о качестве традиционных вычислений получить чрезвычайно трудно.

Локализующие вычисления ищут ответа на вопрос, поставленный так: в чем содержится? Например, в каком промежутке содержится число π.

Вообще говоря, возможны разные варианты локализующих множеств.Так, в теоретических построениях Анализа излюбленным локализатором точки является ее окрестность — окружающий ее открытый шар (впрочем, неизвестного, как правило, радиуса). Чаще всего эту роль в локализующих вычислениях исполняет отрезок или вектор, составленный из отрезков. Концы этих отрезков суть машинные числа, поскольку компьютер предполагается естественным инструментом. Отрезок переводится на английский как closed interval. Так возник термин *интервальные вычисления.*

Мы предпочитаем термин “локализующие вычисления”, имея в виду не просто арифметику интервалов, но систему действий, приводящих именно к локализующим отрезкам (или векторам).

Так, рассмотрим задачу вычисления функции, которая зависит от коэффицента, полученного посредством измерения. Понятно, что его точного значения мы не знаем. Но имея представление о погрешности измерения, мы знаем, что оно лежит в определенных пределах. Отрезок между этими пределами и следует брать в роли коэффицента согласно интервальному подходу. Тем самым мы пробуем в этой роли все наполняющие его числа. Но тогда действия над числами должны быть обобщены на числовые множества; это — предмет *интервальной арифметики.* Оказывается что в результате такого расчета вместо точного значения функции (которое все равно едва ли можно найти из-за многочисленных погрешностей машинных вычислений), получается включающий это значение промежуток – *локализатор.*

Таким образом, эта новая технология научных вычислений приводит к гарантированным двусторонним границам искомого результата в тех случаях, когда невозможно получить точное значение. Между тем, точность — естественное качество вычислений. Таким образом, достигается новое качество — гарантированная точность вычислительных работ.

Возникновение локализующих вычислений связано с именем американского математика Рэймона Эдгара Мура [1]. Ему предшествовали:

- Владимир Модестович Брадис [2,3],
- Розалинд Сесил Янг (R.C. Young) [4],
- Мечислав Вармус (M.Warmus) [5],
- Теруо Сунага (T.Sunaga) [6],
- Леонид Витальевич Канторович [7].

В нашей стране имеются математики, активно развивающие это направление, но широким кругам математиков и специалистов по вычислениям оно не известно.

Рост интереса к этому направлению на Западе скоро приведет, видимо, к появлению стандарта на научные вычисления, требующего получение двусторонних гарантированных границ.

По инициативе покойного Председателя Методической комиссии Факультета прикладной математике — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета члена-корреспондента Российской Академии Наук профессора В.И. Зубова в течение 10 лет, с 1993 г. по 2002 г., автором проводилась модернизация курса "Методы вычислений", предусматривающая внедрение локализующего подхода. Соответственно, идея локализации отличает наши лекции от других одноименных учебных курсов.

С 1998 г. к этой работе примкнул доц. В.Б. Орлов, читавший лекции и руководивший домашними контрольными и курсовыми работами. В ходе этого эксперимента выпускались конспекты лекций ([10.1-10.12]), разрабатывались темы домашних контрольных работ и курсовиков, составлялись варианты этих работ, причем индивидуально для каждого студента данного потока. Полученный опыт еще предстоит обобщить.

Предлагаемая работа представляет обзор основных аналитических идей, лежащих в основе этого курса.

2. Идея интервальной локализации.

Сама идея локализации отражает тот факт, что числовым характеристикам реальных явлений, процессов, конструкций свойственна некоторая размытость, неопределённость, нестабильность.

Посмотрим на объекты и процессы технического мира.

Сколько-нибудь сложное техническое устройство состоит из составных частей — *комплектующих изделий.* Поэтому массовое производство технических устройств невозможно без столь же массового производства составных частей. Каждая часть должна удовлетворять тем или иным *стандартам точности*, иначе из них не собрать устройства в целом. Таким образом современное производство невозможно без стандартизации.

Заметим, что Пётр I в своих указах предписывал определённые стандарты в оружейном производстве и гражданском строительстве [8]. На Тульском оружейном заводе уже в 1760-х была внедрена стандартизация (в США – только в 1793 [8]).

На рубеже 20-х и 30-х был налажено массовое производство компонентов радиотехнической аппаратуры, в том числе *резисторов*, двухполюсников, сосредотачивающих в себе электрическое сопротивление. На корпусе такого двухполюсника, кроме *номинала сопротивления,* выражаемого в Омах, килоОмах и т. д., указывается *допуск* в процентах. Например, данные “10 КОм, 10%” означают, что сопротивление расположено между 9 и 11 кОм.

Таким образом, практика радиотехники давно отказалась от точного числового представления электрических характеристик и перешла к локализующему представлению, причём интервальному.

Можно измерить сопротивление омметром. Неопределённость уменьшится, но из-за всегдашней неточности измерений не исчезнет. К тому же сохранится естественная нестабильность сопротивления (температурная, в частности). И сузить до точки промежуток, заключающий сопротивление, всё равно не удастся.

Равным образом, ёмкость конденсаторов (характеристики других электрических двухполюсников) стала задаваться номинальным значением и допуском.

В математических вычислениях наличие погрешностей объясняется, прежде всего неограниченностью множества математических объектов и ограниченностью машинных ресурсов для их представления. Здесь также имеет смысл идея локализации. Её выдвинул впервые Брадис в 1926 в виде *метода границ* [2].

Идея эта, в несколько стилизованной форме такова: отрезок служит локализатором для всех точечных множеств, которые он содержит.

3. Полезность локализации для математических вычислений.

На другом, достаточно броском примере напомним полезность идеи интервальной локализации [10.1].

Пример 1. Пусть нужно сосчитать ординаты точек исследуемой кривой (некоей траектории) для нескольких заданных значений абсциссы. Традиционное вычисление даст к а к и е – т о точки без какой-либо гарантии близости к искомой кривой (см. рис. 1). Как лежит кривая — остаётся неясным. Локализующее вычисление даст вертикальные отрезки — локализаторы для ординат искомых точек (см. рис. 2). Они играют роль засечек, через которые обязана пройти эта кривая. Тут совершенно ясно, насколько концы засечек могут быть удалены от искомых точек кривой.

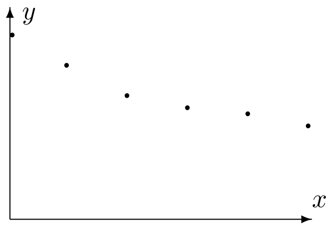

Рис. 1

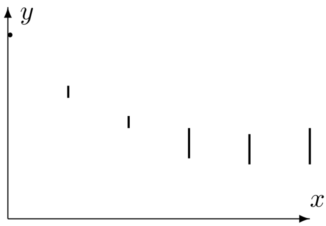

Рис. 2

Отсюда более узкий локализатор является более точным.

4. Интервальная арифметика — расширение числовой. Ассоциация исходного процесса с локализующим

Вторая фундаментальная идея вытекает из первой. Если мы заменяем число x локализующим отрезком X, то логично заменить действия над числами действиями над отрезками. Причём последние, применённые к вырожденным отрезкам, должны совпадать с действиями над числами.

Подобно тому, как комплексная арифметика, применённая к вещественным числам, совпадает с вещественной арифметикой.

Плодотворность этой идеи, в частности, в том, что действий над отрезками существенно больше, чем над числами.

Естественное построение как интервальной арифметики, так и интервального анализа (никто сейчас не проведёт чёткую грань между ними) основано на применении в качестве образов непрерывных числовых функций $f(x)$ их интервальных продолжений, т.е. множеств значений $f(X)$. Для разрывных числовых функций обобщением этого понятия является отрезок $[f(X)]$ — интервальная оболочка множества значений функции.

Таким образом, возникает идея о двух ассоциированных процессах: исходном, теоретическом, и локализующем, машинном.

5. Применение свойств интервальной арифметики. Монотонность интервальных отображений по включению. Поэлементная локализация.

Третья идея вытекает из второй: раз приходится пользоваться интервальной арифметикой, то надо знать и разумно применять её свойства.

Впервые вопрос об отрезках, как объектах алгебраических действиях поставлен английским математиком Р.С. Янг, которая в 1930 опубликовала свою работу [4]. Многие свойства интервальных отображений, в частности, субдистрибутивность и субдистрибутивность по пересечению, открыты ею.

Особенно важно свойство, по которому композиция интервальных продолжений сама не является, вообще говоря, интервальным продолжением (ИП), но его локализатором. Отсюда вытекает неконструктивность понятия ИП, зато конструктивность понятия интервального расширения (ИР) числовой функции — локализатора ИП. Этот факт мы сформулировали и доказали в виде Второй Теоремы о композициях (её прототип принадлежит Р.Э. Муру [1]). Она гарантирует правомерность композицонного интервального расчёта [10.1].

Вторая Теорема о композициях. Пусть функция f типа $R^n \to R$ есть композиция функций f_i типа $R^k \to R$ (k не фиксировано), для которых имеются интервальные расширения F_i, которыми составляется аналогичная композиция F. Тогда последняя является интервальным расширением для f.

Теперь становится понятным, что мир используемых в качестве локализаторов интервальных отображений не исчерпывается одними ИП. Важное очевидное свойство ИП – *монотонность по включению* (МПВ), т.е. несужение значений ИП при расширении аргумента – становится совсем неочевидным в общем случае интервальных расширений. К счастью, верна Первая Теорема о композициях

[10.1]. Она сразу обрисовывает некий общий класс интервальных отображений, имеющих это свойство.

Первая Теорема о композициях. Пусть отображения типа множество – множество $\Phi_i(X)$ образуют композицию $\Phi(X) = \Phi_1(\Phi_2 ... \Phi_p(X)...)$. Если они монотонны по включению, то и композиция $\Phi(X)$ – тоже.

Вместе с тем, Вторая Теорема [10.1] является частной реализацией более общего принципа *поэлементной локализации* вычислительных процессов. Процессы эти состоят из отдельных элементов, которые могут быть названы элементарными операциями. Не меняя структуры процесса, заменим каждую такую операцию на локализующую. Принцип утверждает, что при определённых условиях процесс, состоящий из новых операций, будет локализующим для исходного процесса. Вторая Теорема гарантирует, что это так для композиционных схем, т. е. для явного представления функций через элементарные.

6. Идея применения боксов как средства локализации в многомерных пространствах

Эта идея обеспечивает перенос на пространство R^n идей и методов локализации, разработанных для отрезков. Конечно, шары — тоже средство локализации (имеющее свои плюсы), однако, боксы имеют ряд удобств. В частности, покоординатность ряда действий интервальной арифметики [10.1].

7. Мажоризация

Термин "Мажоризация" первично означал то же, что и "Мажорирование", т. е. замену данной величины её верхней границей. В этом качестве он участвует в названии книги [9]. Мы его употребляем, чтобы обозначить машинную коррекцию находимого машинного отрезка $\tilde{f}(X)$ до $F(X)$, которая состоит в расширении первого так, чтобы выполнить включение

$$f(X) \subseteq F(X). \tag{1}$$

Это необходимо, так как включение $f(X) \subseteq \tilde{f}(X)$, вообще говоря, не выполняется.

Известно несколько типов мажоризации. Один из них состоит в *направленном округлении* исходного отрезка $Y = \tilde{f}$. Каждый способ нуждается в доказательстве *состоятельности* (т. е. выполнении включения (1)) [6.1]. Весьма полезно для мажоризации (как и для интервальных отображений вообще) свойство МПВ.

Благодаря идее мажоризации становится возможным построение подпрограмм вычисления ИР стандартных функций на основе того или иного готового языка программирования. При этом важно, чтобы данная функция была стандартной в избранном языке и удовлетворяла определённым условиям — Гипотезам об языке, иначе говоря о вычислительной среде.

Вместе с Второй Теоремой о композициях, мажоризация открывает возможность машинного композиционного интервального расчёта.

8. Идея интервализации приближенных формул

Имеется ввиду переход от приближённой формулы к локализующему интервальному отображению.

Исходная приближённая формула должна быть записана с остаточным членом:

$$f(x) = \underbrace{p(x)}_{\text{приближенное выражение}} + \underbrace{\delta\left(\theta(x),\ x\right)}_{\text{остаточный член}}, \tag{2}$$

причём должен быть указан отрезок возможной локализации *неопределённого параметра* θ. Например, $\theta \in [0,\ 1]$. Другой случай: $\theta \in X$. Вообще,

$$\theta \in \Theta,$$

где Θ – какой-либо другой известный отрезок.

Возьмём этот последний случай и предположим для простоты, что известно выражение $p(x)$ в виде композиции стандартных функций и что функции $f(x)$ и $\delta(\theta,\ x)$ непрерывны в тех отрезках изменения аргументов, которые возникнут.

Алгоритмика интервализации такова [10.3].

1. Ничего не меняя, переходим от обычной арифметики к интервальной. Формально числа и числовые переменные изображаются соответствующими вырожденными отрезками. Получаем:

$$f\left([x,\ x]\right) = p\left([x,\ x]\right) + \delta\left([\theta,\ \theta],\ [x,\ x]\right).$$

Подчеркнём: здесь присутствуют только исходные величины, а не их машинные аналоги.

2. Теперь расширяем отрезки-аргументы $[x,\ x]$ и $[\theta,\ \theta]$ до множеств $X = \left[\underline{X},\ \overline{X}\right]$ и $\Theta = \left[\underline{\Theta},\ \overline{\Theta}\right]$. Благодаря МПВ интервальных продолжений их отрезки-значения также расширяются, причём до отрезков $p\,(X)$ и $\delta\,(\Theta,\ X)$. Получаем включение

$$f(x) \in p(X) + \delta(\Theta,\ X).$$

3. Правая часть его не зависит от x. По произвольности $x \in X$ получаем:

$$f(X) = \bigcup_{x \in X} f(x) \subseteq \bigcup_{x \in X} \Big(p(X) + \delta\,(\Theta,\ X)\Big) = p(X) + \delta\,(\Theta,\ X)\,.$$

Таким образом,

$$p(X) + \delta\,(\Theta,\ X) \tag{3}$$

— локализатор для $f(X)$. Но это ещё не машинный локализатор.

4. Теперь заменим операцию интервального сложения в (3) и все стандартные функции в композиционных представлениях множеств $p\,(X)$, $\delta\,(\Theta,\ X)$ на их машинные интервальные расширения (применяя мажоризацию). По Второй Теореме получим локализатор отрезка (3). Тем более он будет локализатором для $f(X)$.

Интервализация завершена.

9. Идея экспериментального исследования функции и верификации приближённых формул.

Рассматривается задача исследования функции. Студенты должны помнить распорядок исследования с помощью программной системы ЗНАК [10.5]. Правда, тогда предполагалось, что исследуемая функция задаётся композицией стандартных функций.

Близкой является задача *верификации приближённой формулы* ([6.7]). Дана функция $f(x)$ на отрезке X. Она аппроксимируется функцией $p(x)$. Требуется выяснить информацию о погрешности приближения $\delta(x) = f(x) - p(x)$ и, прежде всего, о $\min\limits_{x \in X}$ и $\max\limits_{x \in X}$.

Очевидно, для этого нужно исследовать функцию $\delta(x)$.

При этом выясняются границы абсолютной погрешности аппроксимируемой функции.

Модификацию этой задачи составляет верификация той же формулы с позиций *относительной точности*. На этот раз исследуется относительная погрешность

$$\delta = \frac{f(x) - p(x)}{f(x)} = 1 - \frac{p(x)}{f(x)}.$$

Разумеется, в предположении, что $f(x)$ не обращается в нуль.

10. Идея контроля посредством пересечения

Пересечение нескольких локализаторов, добытых разными средствами, даёт новый локализатор, вообще говоря, более узкий. Вместе с тем, непустота этого пересечения — отличное средство контроля верности вычислений. Если пересечение пусто, то это свидетельствует об ошибке в вычислениях или рассуждениях, приведших к такому результату [10.1].

11. Идея конечной стабилизации последовательностей отрезков

Как выяснено в [10.8], числовые последовательности, как правило, не стабилизируются, даже, если имеют конечный предел. В математическом анализе не нашлось даже термина для этого явления.

Напротив, на конечных множествах, каким является множество машинных чисел, стабилизация — не редкость.

Она справедлива для интервальных последовательностей, вложенных,а также антивложенных (лишь бы последние были ограниченными). Для тех и тех — в машинном исполнении.

12. Применение теоремы Брауэра-Шаудера к локализации неподвижной точки процесса-прототипа его интервальным аналогом

Рассмотрим одновременно итерационный числовой (или векторночисловой) процесс-прототип и его интервальный аналог:

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{x}^k\right), \quad \mathbf{X}^{K+1} = \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{X}^k\right).$$

Слова *интервальный аналог* подразумевают, что отображение $\mathbf{\Phi}(\mathbf{X})$ является интервальным расширением функции $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$.

Нижеследующие теорема и следствие вытекают из теоремы Брауэра-Шаудера (пп. 1122, 1135, из [10.8]).

Теорема 1135.1. *Если $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ непрерывна в боксе $\mathbf{X}$ и $\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X}$, то в боксе $\mathbf{X}$ существует неподвижная точка $\boldsymbol{x}^*$ функции $\boldsymbol{\varphi}$.*

Следствие (п. 1135 из [10.8]). *Стабилизированный бокс $\mathbf{X}^{stab}$, результат простого интервального ИП, содержит неподвижную точку процесса-прототипа, если $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ непрерывна в $\mathbf{X}^{stab}$.*

Следующее предложение вытекает из конечной стабилизации вложенной последовательности боксов.

Предложение. *Если*

1) *функция $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ непрерывна в боксе $\mathbf{X}^0$,*

2) $\mathbf{\Phi}(\mathbf{X^0}) \subseteq \mathbf{X}^0$,

3) *отображение $\mathbf{\Phi}(\mathbf{X})$ вычисляется компьютером,*

то вложенный процесс $\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{X}^k\right) \cap \mathbf{X}^k$ стабилизируется, причём стабилизированный бокс содержит неподвижную точку функции $\boldsymbol{\varphi}$.

13. Идея окончательности локализации неподвижной точки процесса-прототипа его интервальным аналогом

Пусть $\boldsymbol{x}^*$ — какая-нибудь неподвижная точка функции $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$, т. е. справедливо равенство $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{x}^*\right)$. Окончательность локализации интервальным аналогом неподвижной точки (НП) процесса-прототипа означает:

$$\boldsymbol{x}^* \in \mathbf{X}^k \Longrightarrow \boldsymbol{x}^* \in \mathbf{X}^{k+1}.$$

Другими словами, если бокс $\mathbf{X}^k$ оказался для НП локализатором, то все остальные — будут также ([10.8], п. 1134).

Эта идея оказалась очень плодотворной в том смысле, что из неё следует ряд теорем: об отсутствии решения в обработанной части пространства и об отсутствии решения при пустом пересечении итерационных боксов. Следовательно, вытекают новые признаки отсутствия решений.

Этот принцип изложен для простого итерационного процесса. Но надо помнить, что для конкретных видов этого процесса окончательность может быть и несвойственна. Её надо доказывать! В [10.8] окончательность доказана для простого итерационного процесса, для процессов Ньютона-Мура и Ньютона-Кравчика (пп. 1142 и 1144).

14. Применение пересечений и интервальных оболочек для создания вложенных и антивложенных итерационных процессов

Эти идеи изложены в пп. 1137 и 1138 из [10.8]. Способ создания вложенных процессов принадлежит Муру [1]. На эти процессы переносится свойство окончательности основного процесса.

15. Идея предварительной локализации решений числовых уравнений

Изучая [10], мы дважды занимались предварительной локализацией решений числовых уравнений. Первый раз в [10.5], когда искали промежуток машинного расчёта (перед поиском точек перемены знака с помощью системы ЗНАК), и в [10.8] (пп. 1102, 1103), когда искали бокс, вне которого нет решений (с тем, чтобы искать в нём эти решения с помощью Алгоритмического Комплекса, попросту *Решателя*).

В обоих случаях мы предварительно искали бокс для дальнейшего машинного расчёта. Бокс должен быть таким, чтобы вне его решений не было. В этом и состоит предварительная локализация решений. Это делается посредством некоторого теоретического исследования.

Либо надо доказывать неограниченность множества решений.

16. Идея признаков отсутствия решений

В задаче поиска решений негативные признаки не менее важны, чем позитивные. При достаточном измельчении бокса предварительной локализации большинство подбоксов не содержат решений, если множество их конечно (см. пп. 1101 и 1103, [10.8]).

Простейшим негативным признаком для системы уравнений

$$f_i(x) = 0 \quad (i = 1...n)$$

в боксе $\mathbf{X}$ служит соотношение $f_i(\mathbf{X}) \not\ni 0$ для какого-либо i. Для этого достаточно выполнения одного из неравенств:

$$\underline{F_i(\mathbf{X})} > 0, \quad \overline{F_i(\mathbf{X})} < 0,$$

где $F_i(\mathbf{X})$ — интервальное расширение для $f_i(x)$. Этот признак, так называемый F-тест, предусмотрен в АК в роли “минёра”, обнаруживающего “мины”, т. е. локализующего решения системы.

17. Идея мультиинструментности решателя уравнений

В [10.8] выводится несколько признаков, как существования, так и отсутствия решения в данном боксе. Имеет смысл их все или большую часть применять в решателе систем числовых уравнений. Каждый признак можно сравнить с инструментом в руках математика-прикладника. Мы приходим к идее построения мультиинструментного решателя (§ 115).

18. Дробление предварительного локализатора

Пользование практически всеми признаками, как отсутствия, так и наличия решений упрощается, если уменьшать размеры бокса. Поэтому предварительный локализатор полезно дробить на более мелкие подбоксы. Это предусмотрено уже системой ЗНАК. Способы дробления различны. Можно использовать ту разновидность бисекции, которая описана в [10.8] (п. 1105).

Управление измельчением и аппробация боксов посредством разных признаков осуществляется Решателем (§ 115).

19. Идея предварительной (верифицирующей) локализации интегральной кривой

Предварительная локализация представляет часть очередного шага интегрирования $X_{k+1} = [x_k,\ x_{k+1}]$. дифференциального уравнения $y' = f(x,\ y)$. Цель — убедиться в продолжимости на этот отрезок решений интервальной задачи Коши с началом $x = x_k$, $y \in Y_k$. Здесь Y_k — значение локализующей зоны, полученной при $x = x_k$ в результате предшествующего процесса интегрировании от точки $x = x_0$. Если продолжимость будет подтверждена, то предварительный локализатор, полученный для отрезка X_{k+1}, используется для интервализации остаточного члена на стадии уточняющего интегрирования. Если же продолжимость сомнительна, то следует выбрать меньшую длину шага $h = |x_{k+1} - x_k|$ и повторить верификацию на шаге X..

Подробности зависят от алгоритма предварительной локализации. В [10.9] (§ 124) описано 2 алгоритма. Первый, так называемый Δ-*алгоритм*, представляет интервализацию итерационного процесса Пикара-Линделёфа. Второй, $\vee$-*алгоритм,* является разновидностью первого, освобождённой от условия монотонности по включению интервального расширения функции $f(x,\ y)$.

20. Идея уточняющей (интерполирующей) локализации интегральной кривой посредством интервализованной формулы Тэйлора

Точность предварительной локализации невелика. Это показано в пп. 1262, 1263 [10.9]. Поэтому необходима уточняющая локализация с помощью той или иной приближённой формулы. Должна быть обеспечена возможность уточнения для всех $x \in X_{k+1}$, т. е. интерполирования. В результате промежутки между засечками на диаграммах типа рис. 3 будут заполнены секциями локализующей зоны.

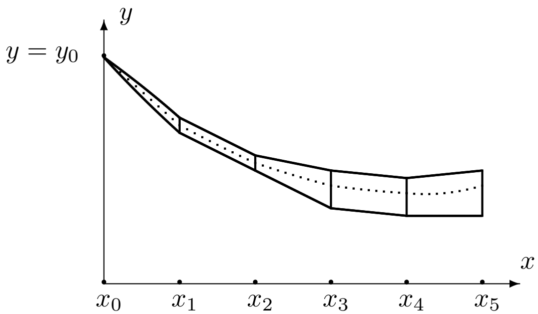

Рис. 3

Этому условию отвечает формула Тэйлора того или иного порядка, смотря от степени гладкости решений дифференциального уравнения.

Проблема уточняющего интегрирования по Тэйлору обсуждается в § 125 из [10.9].

21. Идея контролирующей локализации интегральной кривой посредством интервализованной квадратурной формулы

Третий этап локализации — контролирующий. Для этого нужно привлечь существенно другой метод локализирующего интегрирования. Важно, чтобы он имел тот же порядок точности, что уточняющий метод. В § 127 из [10.9] для этого использован метод квадратурных формул, в частности, метод трапеций. Правда, в методе квадратур нет механизма интерполяции. Но для контроля хватит отслеживать непустоту пересечений локализаторов только в узлах.

Заодно достигается дополнительное уточнение узловых локализаторов, что благотворно скажется на последующем процессе интегрирования.

22. Идея раздельной локализации границ локализующей зоны интегральных кривых

Как правило, уже на втором шаге интегрирования локализующая версия имеет в виду не точечную, а интервальную задачу Коши.

Следовательно, можно было бы и с самого начала рассматривать именно интервальную начальную задачу:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) \in Y_0 = \left[\underline{Y_0},\ \overline{Y_0}\right]. \tag{4}$$

Эта задача определяет множество, или *пучок* $Y(x)$ решений $y(x)$ и соответствующих интегральных кривых.

Благодаря непересечению различных интегральных кривых (что является следствием теоремы единственности), этот пучок ограничен "крайними" интегральными кривыми

$$y = y^-(x), \quad y = y^+(x),$$

начальные точки которых лежат на концах отрезка Y_0 :

$$y^-(x_0) = \underline{Y_0}, \quad y^+(x_0) = \overline{Y_0}.$$

Это обстоятельство позволяет сводить (по крайней мере для уравнений первого порядка) пучковую задачу к решению двух точечных.

На практике же всё равно приходится искать обе "крайних" интегральных кривых в интервальной манере. Для каждой граничной ИК формируется локализующая зона. Для нижней границы пучка:

$$Y^-(x) = \left[\underline{Y^-(x)}, \quad \overline{Y^-(x)}\right]$$

и для верхней:

$$Y^+(x) = \left[\underline{Y^+(x)}, \quad \overline{Y^+(x)}\right].$$

В результате получается локализатор для всего пучка:

$$Y(x) = \left[\underline{Y^-(x)}, \quad \overline{Y^+(x)}\right].$$

Пару таких процессов можно применить всё к той же интервальной задаче Коши (4).

Это – один из подходов к локализующему интегрированию дифференциальных уравнений как с интервальным началом (п. 1222), так и с точечным (§ 128 из [10.9]).

Отметим, что и раздельная локализация границ, вообще говоря, на каждом шаге интегрирования имеет всё те же три этапа.

23. Идея внутренней локализации

Выше мы говорили о *внешней локализации*, которая имеет вид включения

$$\text{Множество} \subseteq \text{внешний локализатор.}$$

Эпитет "внешний" мы опускали.

Не менее важна внутренняя локализация, выражаемая включениями противоположного типа:

$$\text{Множество} \supseteq \text{внутренний локализатор.}$$

При этом предполагается, чтобы внутренний локализатор столь же просто выражался в машинных числах, что и внешний.

В п. 231 из [10.2] мы познакомились с выводом внутренних оценок для множеств значений функций. Это и есть внутренняя локализация.

Получив внешний локализатор $f(X) \subseteq F(X)$, мы сразу же задумываемся, насколько завышена эта оценка? Знание внутреннего локализатора позволяет создать двустороннее включение $F_{\text{внут}}(X) \subseteq f(X) \subseteq F(X)$, позволяющее судить об этой завышенности по близости обоих локализаторов, $F_{\text{внут}}(X)$ и $F(X)$, друг к другу.

Мы рассматривали большей частью задачу о локализации одноточечных множеств: получении таких чисел $\underline{X}$ и $\overline{X}$, чтобы искомое x оказалось между ними. Невозможно здесь поставить задачу внутренней локализации. Поэтому ставят её для многоточечных множеств.

К таким задачам относятся задачи с интервальными параметрами. Например, задачи, рассмотренные в упомянутом п. 231, или в § 24. Сейчас рассмотрим более свежий пример.

Пример 2. Снова обратимся к интервальной задаче Коши. Теперь ясно, что внутри пучка $Y(x)$ будет находиться множество

$$Y_{\text{внут}}(x) = \left[\overline{Y^{-}(x)}, \quad \underline{Y^{+}(x)}\right].$$

Это и есть внутренний локализатор.

Опытным мастером по части работы с внутренними локализаторами является упоминавшийся в наших выпусках [10] новосибирский математик Сергей Петрович Шарый [11].

24. Привлечение мажористики и асимптотики к получению новых включений.

Наконец, кроме этих сугубо новых идей интервального анализа в недрах математического анализа в целом есть немало идей локализующего характера. Отметим одну из них.

Мажористика (теория и практика мажоризации в смысле книги [9]) вместе с асимптотикой помогают в создании новых двусторонних неравенств, т. е. включений.

Так были получены различные способы мажоризации ([10.1]), так решалась ([10.5]) задача предварительной локализации точек перемены знака.

25. Н.Е. Кирин и локализующие вычисления.

Заведуя кафедрой, которая длительное время именовалась кафедрой численного анализа, Н.Е. Кирин всегда интересовался задачами локализации. В первой части учебного пособия [12] на стр. 52 – 53 приводится научный результат, под названием “Локализация решения”, относящийся к критерию существования решения системы нелинейных уравнений.

Профессор Н.Е. Кирин просил нас сообщить студентам о замеченных им опечатках на стр. 53 с тем, чтобы они исправили их:

– третья строка сверху, читать (3.22) вместо (3.19);

– в предпоследнем неравенстве в правой части 0, а не $f_i(0)$; ,

– последнее неравенство читать в виде: $\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in D_j} \sum\limits_{i=1}^{n} v_i f_i(\boldsymbol{x}) < 0.$

Может быть, на этой базе удалось бы создать новые конкретные достаточные признаки существования или отсутствия решений.

Н.Е. Кирин по-товарищески тактично и ненавязчиво следил за нашими успехами. Я помню, что он один из первых приобрёл изданные ещё на рубеже 1996-97 гг. выпуски конспектов моих лекций и пошутил, что Григорий Григорьевич теперь издаёт полное собрание сочинений.

За полгода до гибели он посвятил мне депонированную в ВИНИТИ статью по квадратурам [13]. Это посвящение я воспринимаю теперь как призыв к действию от безвременно ушедшего товарища по работе..

Указатель литературы

1. *Moore R.E.* Interval Analysis. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1966. 190 с.

2. *Брадис В.М.* Приближенные вычисления // На путях математики. Статьи В.М. Брадиса, С.Н. Жаркова, А.В. Казакова, Н.М. Соловьева, И.И. Чистякова. М., Мир, 1926. 132 с.

3. *Брадис В.М.* Устный и письменный счёт. Вспомогательные средства вычислений // Энциклопедия элементарной математики. Книга 1. М., Учпедгиз, 1951. 448 с.

4. *Young R.C.* The Algebra of many-valued quantities // Math. Ann., 1931, v. 104, P. 260–290.

5. *Warmus M.* Rachunek przybliżony w zakresie pomiarów technicznych i wynikających z nich błędów // Przegląd Elektrotechniczny. 1955, 31, №10/11, P. 748–752.

6. *Sunaga T.* Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // RAAG Memoirs, 1958, v. 2, P. 547–564.

7. *Канторович Л.В.* О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал, том III, №5, 1962, С. 701–709.

8. Стандартизация. БСЭ, второе издание, том 40, 1957, С. 464-467.

9. *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: теория мажоризации и её приложения. М., Мир, 1983. 576 с.

10. *Меньшиков Г.Г.* Интервальный анализ и методы вычислений. Конспект лекций. СПб., Отдел оперативной полиграфии НИХИ СПБГУ. 1998 — 2001.

Выпуски:

10.1. Введение в интервальную организацию вычислений. Издание второе. 2000. 63 с.

10.2. Двустороннее решение элементарных задач. Проблема грубости композиционного интервального расчёта. Издание второе. 2000. 54 с.

10.3. Интервализация приближённых формул. Численное суммирование рядов. Издание второе. 2000. 63 с.

10.4. Введение в аппроксимацию функций. Издание второе. 2000. 38 с.

10.5. Исследование функций одной переменной. Дифференцирование функций. 1998. 72 с.

10.6. Локализующее вычисление интегралов. 1988. 87 с.

10.7. Аппроксимация функций и верификация приближений. 1988. 67 с.

10.8. Итерационные процессы и системы числовых уравнений. 1999. 82 с.

10.9. Элементы локализующего интегрирования дифференциальных уравнений. Издание второе. 2001. 99 с.

10.10. Локализующее интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. 2001. 78 с.

10.11. Аналитическая и алгебраическая поддержка локализующего интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 2001. 43 с.

10.12. Интервально-аналитические дополнения. 2001. 19 с.

11. *Шарый С.П.* Интервальные алгебраические задачи и их численное решение. Докторская диссертация. Российская Академия Наук. Ордена Ленина Сибирское отделение. Институт Вычислительных Технологий. Новосибирск, 2000. 322 с.

12. *Иванов А.П., Камачкин А.М., Кирин Н.Е., Кутузов С.А., Михеев С.Е., Позняк Л.Т.* Методические указания к вычислительному практикуму. В 4-х частях // Часть 1. Л., ЛГУ, ПМ-ПУ, 1983 - 1988. 61 с.

13. *Кирин Н.Е.* Об одном квадратурном процессе с экономизацией вычислений // Депонировано в ВИНИТИ 11.05.99 №1474. 8 с.

С. Е. Михеев

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЕЛАКСАЦИОННОГО УСКОРЕНИЯ

Сравнение качества сходимости итеративных процессов чаще всего производится по скорости убывания оценки текущей погрешности от шага к шагу. Чем быстрее — тем лучше. Другими словами, если по методу W имеются оценки $d_k > 0$, а по методу V — оценки $\hat{d}_k > 0$, и $d_k < \hat{d}_k$, $k = 1, 2, ...,$ то метод W сходится лучше метода V. Однако, когда результаты численных испытаний сказываются на оценке погрешности случайным образом, т.е. она имеет вид $d_k(u)$, где u — случайный параметр, подобному подходу к анализу качества требуется некоторое развитие. Например такое:

$$(\forall u)\ \hat{d}_k(u) > \max_u d_k(u), \qquad k = 1, 2, ... \tag{1}$$

Но не нужно проницательности, чтобы увидеть ограниченность условия (1). Следуя ему, нельзя утверждать, что метод W сходится лучше метода V, если оно нарушено даже в небольшом числе случаев u. И обратное утверждение тогда тоже неверно. То есть по качеству сходимости методы W и V не сравнимы.

При не детерминированных оценках погрешностей представляется целесообразным [1] производить сравнение качества сходимости итеративных методов через математические ожидания этих оценок, а об устойчивости процесса сходимости судить по их дисперсии. Такой анализ здесь будет проиллюстрирован на методе простой итерации и одной его модификации, предложенной в статье [3]. Поэтому нижеизложенное можно рассматривать и как продолжение статьи [3].

§1. Метод точной релаксации

В работах [2], [3] был предложен простой способ ускорения сходимости метода простой итерации, использующий базовый алгоритм $\mathcal{A}$:

$$x^{k+1} = \mathcal{A}(x^k), \qquad k = 0, 1, 2, ..., \tag{2}$$

когда известны оценки

$$(\forall x)\ \|\mathcal{A}(x)-\alpha\| \le c||x-\alpha||, \qquad c<1, \tag{3}$$

$$\|x^0-\alpha\| \le d_0 \doteq d. \tag{4}$$

Здесь $\alpha, x^k, x, \mathcal{A}(x) \in H$, H — гильбертово (в частности, и евклидово) пространство, $\|\cdot\|$ — естественная норма в нем, α — решение исходной задачи f из некоторого семейства F. Задача f входит неявным параметром в алгоритм $\mathcal{A}$. Итерации согласно (2) и (3) порождают сходящуюся к α последовательность $\{x^k\}_1^\infty$. Если $\mathcal{A}$ непрерывен, то α — его неподвижная точка.

Обычно суть оценки (3) понимается как условие на образ $\mathcal{A}(x)$ при фиксированном α, но можно понимать его и как ограничение на неподвижную точку α при фиксированных x, $\mathcal{A}(x)$, т.е. допустить ее вариабельность в пределах имеющейся информации. Определим шар Аполония ([1], [3]) и оценочный шар:

$$S(x,\mathcal{A}) \doteq \{\alpha \big| \|\mathcal{A}(x)-\alpha\| \le c\|x-\alpha\|\}, \qquad S_x^d \doteq \{y \big| \|y-x\| \le d\}.$$

Для ускорения сходимости предлагается использовать **принцип минимальности погрешности** на следующем шаге:

Пусть известны только текущее приближение x, *оценка его погрешности* d $(\alpha \in S_x^d)$ *и вычислено* $\mathcal{A}(x)$. *В качестве последующей итерации следует выбрать центр минимального шара* S *(т.е. с минимальным радиусом), содержащего* $S_x^d \bigcap S(x,\mathcal{A})$.

Из принципа минимальности была получена [2], [3] модификация $\mathcal{M}$ базового алгоритма (далее — *точная релаксация*). Пусть известна оценка d погрешности текущей итерации x, положим

$$d^* \doteq \min_y \max_{\alpha \in S_x^d \cap S(x,\mathcal{A})} \|y-\alpha\|. \tag{5}$$

Аргумент, доставляющий минимум в (5), обозначим через x^*. Таким образом, x^* — центр шара минимального радиуса d^*, содержащего пересечение $S_x^d \bigcap S(x,\mathcal{A})$. Точная релаксация задается формулой

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}(x), x, d) \doteq (x^*, d^*). \tag{6}$$

Итак, точная релаксация сопоставляет результату базового алгоритма от текущего приближения, текущему приближению и оценке текущего приближения некоторый вектор $x^* \in H$ и число, которые предлагаются в качестве последующего приближения и оценки его погрешности.

Показано, что в одномерном случае всегда $d^* \leq \dfrac{cd}{1+c}$. Т.е. оценка погрешности для x^* всегда лучше оценки для $\mathcal{A}(x)$. В многомерном случае всегда $d^* \leq cd$. Поэтому естественно ожидать, что итерации согласно рекуррентной формуле

$$(y^{k+1}, d_{k+1}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}(y^k), y^k, d_k) \tag{7}$$

с начальными значениями $y^k = x^0$, $d_0 = d$ будут сходиться лучше, чем в методе простой итерации (2) – (4). Пусть

$$\vec{r} = \vec{r}(x) \doteq \mathcal{A}(x) - x, \qquad r \doteq \|\vec{r}\,\|. \tag{8}$$

Одномерный случай $(r = \|\vec{r}\,\|)$.

$$x^* = \begin{cases} x + \left(d \operatorname{sign} \vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{1+c}\right)/2 \quad \wedge \quad d \leq \dfrac{r}{1-c}\ , \\ x + \dfrac{\vec{r}}{1-c^2} \quad \wedge \quad d > \dfrac{r}{1-c}\ , \end{cases} \tag{9}$$

$$d^* = \begin{cases} \left(d - \dfrac{r}{1+c}\right)/2 \quad \wedge \quad d \leq \dfrac{r}{1-c}\ , \\ \dfrac{rc}{1-c^2} \quad \wedge \quad d > \dfrac{r}{1-c}\ . \end{cases} \tag{10}$$

Многомерный случай. Переломным расстоянием в формулах для параметров минимального шара S оказывается

$$r_1 = r_1(d) = (1-c^2)\sqrt{\frac{d^2}{1+c^2}} = \frac{(1-c^2)d}{\sqrt{1+c^2}}. \tag{11}$$

Если $r \leq r_1$, то минимальный шар совпадает с множеством точек α, удовлетворяющих условию (3), иначе в построении минимального шара нужно учесть еще шар S_x^{cd}:

$$x^* = \begin{cases} x + \vec{r}(1 + d^2(1-c^2)/r^2)/2 \quad \wedge \quad r_1 < r\,, \\ x + \dfrac{\vec{r}}{1-c^2} \quad \wedge \quad r_1 \geq r\,, \end{cases} \tag{12}$$

$$d^* = \begin{cases} \sqrt{d^2 - (r + d^2(1-c^2)/r)^2/4} & \wedge \quad r_1 < r\,, \\ \dfrac{cr}{1-c^2} & \wedge \quad r_1 \geq r\,. \end{cases} \tag{13}$$

Оценки погрешности d^* ((10), (13)) существенно отличны от оценок $c^k d$ в методе простой итерации своей априори непредсказуемостью. Поэтому сравнение этих оценок по худшему варианту представляется неполноценным.

§2. Обобщающая схема

Пусть для поиска приближенных решений задач f семейства F имеется итеративный метод W, порождающий из начальной точки x^0 и некоторых внутренних параметров u^0 последовательность итеративных точек $W_x(x^0, u^0) = \{x^k\}_1^\infty \subset H$, сходящуюся к α — решению задачи f. Часто этот метод является простой итерацией с помощью базового алгоритма вида $\mathcal{G}(v(X), X)$, где $X = (x, u)$, $x \in H$, u — вектор внутренних параметров, v — вектор наблюдения, вообще говоря, случайная величина. Будем называть такой базовый алгоритм *обобщающей схемой.*

Метод W тогда описывается так:

$$X^{k+1} = \mathcal{G}(v(X^k), X^k), \qquad k = 1, 2, ... \tag{14}$$

Выбор начальных значений x^0 и u^0 лежит вне рамок метода W. Природа параметра u может быть весьма разнообразна. Например, набор предыдущих итеративных точек для многоточечных методов. Здесь же будет рассмотрен только скалярный параметр $d = u$, смысл которого — оценка погрешности текущего приближения x: $\|x - \alpha\| \leq d$.

Обозначим с помощью индекса x x-составляющую обобщающей схемы, d-составляющую — с помощью индекса d. Согласно обозначениям

$$\mathcal{G}_d(v(X), X) \geq \|\mathcal{G}_x(v(X), X) - \alpha\|.$$

Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathcal{L}$ две обобщающие схемы для решения одной задачи методом простой итерации.

Определение 1. Схема $\mathcal{L}$ в K раз лучше схемы $\mathcal{G}$, если

$$(\forall X) \quad K\mathcal{L}_d(v(X), X) \leq \mathcal{G}_d(v(X), X) \tag{15}$$

и для больших K высказывание (15) неверно. $\blacksquare$

Расширим такую трактовку качества на схемы со случайностями.

Определение 2. Схема $\mathcal{L}$ в K раз лучше схемы $\mathcal{G}$, если

$$K = \inf_X \frac{\mathrm{E}\,\mathcal{G}_d(v(X), X)}{\mathrm{E}\,\mathcal{L}_d(v(X), X)}, \tag{16}$$

где E — символ математического ожидания. Величину $e = 1/K$ назовем коэффициентом эффективности (схемы $\mathcal{L}$ относительно схемы $\mathcal{G}$). $\blacksquare$

Легко заметить, что О.1 есть частный случай О.2.

Сравним с этих позиций базовый алгоритм совместно с оценкой (3) и его точную релаксацию.

§3. Статистические свойства точной релаксации

Базовому алгоритму $\mathcal{A}$, удовлетворяющему оценке (3), соответствует обобщающая схема

$$\mathcal{G}(v(X), X) = (\mathcal{A}(x), cd), \tag{17}$$

как и ранее $X = (x, d)$.

Точной релаксации M на основе базового алгоритма $\mathcal{A}$ и условия (3) соответствует обобщающая схема

$$\mathcal{L}(v(X), X) = (x^*(\mathcal{A}(x), x), d^*(\mathcal{A}(x), x)), \tag{18}$$

где функции x^* и d^* те же, что и в формулах (9), (10) для одномерного случая и в формулах (12), (13) для многомерного.

Как в (17), так и в (18), вектор наблюдения есть $y = v(X) = \mathcal{A}(x)$. До тех пор пока y не вычислен, т.е. не произведен численный эксперимент, он может трактоваться как случайная величина. Согласно имеющейся информации (текущее состояние X и условие (3)) она должна быть распределена в шаре S^ρ_x, $\rho = d + cd$. Из разнообразия гипотез о распределении случайной величины y исследуем две, как достаточно разумные.

Гипотеза **I**: y равномерно распределена в шаре S^ρ_x.

Эта гипотеза является своего рода минорантой нашего знания о случайной величине y. Минорантой нашего знания об отклонении вектора наблюдения от текущего приближения x является

Гипотеза **II**: Случайная величина $r = ||y - x||$ равномерно распределена на отрезке $[0, \rho]$.

Из гипотезы I однозначно определяется распределение с. в. r (см. далее). Приняв дополнительную гипотезу об одинаковом распределении вдоль любого радиуса в шаре S_x^ρ с. в. y, можно восстановить плотность вероятности с. в. y по плотности вероятности с. в. r.

Отметим, что в одномерном случае гипотезы I и II совпадают.

Теорема 1. *В одномерном случае для гипотез* I *и* II *эффективность релаксации относительно базового алгоритма есть*

$$e = \frac{\mathrm{E}\, d^*}{cd} = \frac{1}{2+2c}. \tag{19}$$

Доказательство. Модифицируем немного формулу (10)

$$d^* = \begin{cases} \delta_1(r) \doteq \dfrac{cr}{1-c^2}, & r \in [0, d - cd], \\ \delta_2(r) \doteq \dfrac{1}{2}\left(d - \dfrac{r}{1+c}\right), & r \in (d - cd, \rho]. \end{cases}$$

Здесь $\rho = d + cd$. Очевидно, для функций δ_1, δ_2 существуют обратные к ним функции b_-, b_+, которые строго монотонны и непрерывно дифференцируемы. Следовательно, случайная величина $z = d^*(r)$, распределенная на отрезке $[0, dc/(1+c)]$, имеет плотность вероятности

$$q(z) = p_1(b_-(z))|b'_-(z)| + p_1(b_+(z))|b'_+(z)|, \tag{20}$$

где p_1 плотность вероятности с. в. r. Для гипотезы I и эквивалентной ей в одномерном случае гипотезы II $p_1(r) = \mathrm{const} = 1/\rho$. И учитывая $b_-(z) = z(1/c - c)$, $\quad b_+(z) = (d - 2z)(1+c)$, из (20) имеем

$$q(z) = \frac{1}{d+cd}\left[\frac{1-c^2}{c} + 2(1+c)\right] = \frac{1+c}{cd}.$$

Отсюда определяем математическое ожидание:

$$\mathrm{E}(d^*(r)) = \mathrm{E}\, z = \int_0^{dc/(1+c)} zq(z)\,\mathrm{d}z = \frac{cd}{2(1+c)}. \tag{21}$$

Оценка погрешности $\mathcal{A}(x)$ — результата базового алгоритма — не зависит от r и равна cd. Следовательно, ее математическое ожидание есть cd. Деля (21) на cd, имеем (19).

Следствие. *Согласно определению* 2 *и теореме* 1 *точная релаксация улучшает базовый алгоритм в* (2+2c) *раз. При сравнении по худшему варианту получается улучшение лишь в* (1+c) *раз.* ■

В многомерном случае точная релаксация может выдавать то же значение, что и базовый алгоритм $\mathcal{A}$. Несложно доказать [3], что это обеспечивает значение $r = r_2 = v1 - c^2 d$, которое максимизирует d в (13). То есть, когда $\|\mathcal{A}(x) - x\| = r_2$, можно говорить, что у точной релаксации *холостой ход* и дополнительные вычисления, потраченные на нее были напрасны. При гипотезе I вероятность попадания y на сферу холостого хода $C_x^{r_2}$ есть отношение "объема сферы" $C_x^{r_2}$ к объему шара S_x^{ρ}. В идеальном случае оно равно нулю. При машинном представлении множеств возможны хотя и малые, но не нулевые значения этого отношения. Они будут сильно зависеть от плотности разрядной сетки, расположения начала координат и от трактовки включения $y \in C_x^{r_2}$. С другой стороны, близость точки y к сфере холостого хода соответствует малому выигрышу от применения модификации, что может вызвать некоторые сомнения по поводу ее эффективности. Снимем их количественными оценками.

Теорема 2. *Положим*

$$a_-(t) \doteq \sqrt{1 + c^2 - 2t^2 - \sqrt{(1 + c^2 - 2t^2)^2 - (1 - c^2)^2}}, \tag{22}$$

$$a_+(t) \doteq \sqrt{1 + c^2 - 2t^2 + \sqrt{(1 + c^2 - 2t^2)^2 - (1 - c^2)^2}}. \tag{23}$$

Тогда в многомерном пространстве E^n $(n \geq 2)$ *для гипотезы* I *эффективность релаксации относительно базового алгоритма есть*

$$e = \frac{-(1-c)^n}{(n+1)(\sqrt{1+c^2})^{n+1}} - \\ - \frac{1}{c(1+c)^n} \left(\int_{c/\sqrt{1+c^2}}^{c} a_-^n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^c a_+^n(t)\,\mathrm{d}t \right), \tag{24}$$

а для гипотезы II *независимо от размерности пространства эффективность релаксации доставляется формулой* (24) *при* $n = 1$.

Доказательство. Ключевым параметром в предыдущих построениях является величина $r = ||y - x||$, $(x = x^k)$. Найдем ее плотность вероятности, приняв гипотезу I.

Общая формула объема V_n n-мерного шара радиусом w имеет вид $V_n = v_n w^n$, а площадь поверхности n-мерной сферы, его ограничивающей, задается формулой $\sigma_n = n v_n w^{n-1}$. Поэтому при равномерном распределении случайной величины y в шаре радиуса $\rho = d + cd$ и с центром в точке x случайная величина r будет иметь плотность вероятности

$$p_n(r) = \sigma_n(r)/V_n(\rho) = n r^{n-1}/\rho^n, \qquad r \in [0, \rho]. \tag{25}$$

Пусть, как и ранее, $d^*(r)$ является оценкой погрешности следующего приближения, но полученного применением точной релаксации с константой c в (3) к приближению x, имеющему оценку погрешности d. Из формулы (13) извлекаем

$$d^*(r) = \begin{cases} \delta_1(r) \doteq \dfrac{cr}{1-c^2}, & r \in [0, r_1], \\ \delta_2(r) \doteq \dfrac{1}{2}\sqrt{2(d^2+c^2) - r^2 - \dfrac{d^4(1-c^2)}{r^2}}, & r \in (r_1, \rho], \end{cases} \tag{26}$$

где $r_1 = d(1-c^2)/\sqrt{1+c^2}$.

Непрерывная функция $d^*(r)$ строго монотонно растет от 0 до $\delta_2(r_2) = cd$ на сегменте $[0, r_2]$, затем строго монотонно убывает до нуля на сегменте $[r_2, \rho]$, где, как и ранее, $r_2 = d\sqrt{1-c^2} > r_1$. Таким образом, обратная к d^* функция $b(z) \doteq (d^*)^{-1}(z)$ имеет две ветви: $b_-([0, cd]) = [0, r_2]$ — возрастающая, и $b_+([0, cd]) = [r_2, \rho]$ — убывающая.

Когда $z \le \delta_1(r_1) = dc/\sqrt{1+c^2} \equiv z_1$, ветвь $b_-(z)$ определяется элементарно: $b_-(z) = z(1/c - c)$.

Для определения этой ветви на сегменте $[\delta_1(r_1), cd]$ и ветви b_+ на сегменте $[0, cd]$ разрешим уравнение

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{2(d^2+c^2) - r^2 - \frac{d^4(1-c^2)^2}{r^2}}$$

относительно r. Возведя его в квадрат и умножив затем на r^2, получим биквадратное уравнение, из которого будем иметь

$$r^2 = (1+c^2)d^2 - 2z^2 \pm \sqrt{(2z^2 - (1+c^2)d^2)^2 - d^4(1-c^2)^2}. \tag{27}$$

При $z \in [0, cd]$ дискриминант

$$D(z) = (2z^2 - (1+c^2)d^2)^2 - d^4(1-c^2)^2 \tag{28}$$

не отрицателен. И он не более квадрата выражения

$$V(z) = (1 + c^2)d^2 - 2z^2. \tag{29}$$

Следовательно, при обоих знаках перед корнем правая часть (27) будет неотрицательной. Поэтому формулы

$$b_-(z) = \sqrt{V(z) - \sqrt{D(z)}} \qquad z \in [z_1, cd], \tag{30}$$

$$b_+(z) = \sqrt{V(z) + \sqrt{D(z)}} \qquad z \in [0, cd], \tag{31}$$

(V и D берутся из (28) и (29) соответственно) определяют вещественные функции.

Плотность вероятности случайной величины $z = d^*(r)$ вычисляется по формуле

$$q(z) = p_n(b_-(z))|b'_-(z)| + p_n(b_+(z))|b'_+(z)| \tag{32}$$

для всех значений z из полуинтервала $[0, cd)$, кроме z_1 — точки "стыковки" двух ветвей оценки погрешности приближения: δ_1 и δ_2, т.е. $z_1 = \delta_1(r_1) = \delta_2(r_1) = dc/\sqrt{1 + c^2}$.

Каково математическое ожидание случайной величины z? Учитывая, что $b'_- > 0$ и $b'_+ < 0$ на интервале $(0, cd)$, имеем

$$\mathrm{E}\, z = \int_0^{cd} zq(z)\,\mathrm{d}z \overset{(32),\,(25)}{=} \frac{1}{\rho^n} \int_0^{cd} z\,\mathrm{d}[b_-^n(z) - b_+^n(z)] =$$

$$= \frac{1}{\rho^n}\left[z(b_-^n(z) - b_+^n(z))\Big|_0^{cd} - \int_0^{cd} [b_-^n(z) - b_+^n(z)]\mathrm{d}z \right].$$

Выделим легко интегрируемую часть и примем во внимание, что $b_+(cd) = r_2 = b_-(cd)$:

$$\mathrm{E}\, z = \frac{1}{\rho^n}\left[-\int_0^{z_1} \left[z\Big(\frac{1}{c} - c\Big)\right]^n \mathrm{d}z - \int_{z_1}^{cd} b_-^n(z)\mathrm{d}z + \int_0^{cd} b_+^n(z)\mathrm{d}z \right].$$

Первый интеграл возьмем непосредственно:

$$\left(\frac{1 - c^2}{\sqrt{1 + c^2}}\right)^n \frac{d^{n+1}c}{(n+1)\sqrt{1 + c^2}},$$

а во втором и третьем сделаем замену переменной интегрирования: $z = td$. Тогда функции b_-, b_+ упростятся соответственно до умноженных на d

$$a_-(t) = \sqrt{1 + c^2 - 2t^2 - \sqrt{(1 + c^2 - 2t^2)^2 - (1 - c^2)^2}}, \qquad (33)$$

$$a_+(t) = \sqrt{1 + c^2 - 2t^2 + \sqrt{(1 + c^2 - 2t^2)^2 - (1 - c^2)^2}}, \qquad (34)$$

а математическое ожидание примет вид

$$\mathrm{E}\, z = d\Bigg[\frac{-c}{n+1}\left(\frac{(1-c)^n}{(\sqrt{1+c^2})^{n+1}}\right) -$$

$$-\frac{1}{(1+c)^n}\left(\int_{c/\sqrt{1+c^2}}^{c} a_-^n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^c a_+^n(t)\,\mathrm{d}t\right)\Bigg].$$

Отсюда определится коэффициент эффективности:

$$e = \frac{-(1-c)^n}{(n+1)(\sqrt{1+c^2})^{n+1}} -$$

$$-\frac{1}{c(1+c)^n}\left(\int_{c/\sqrt{1+c^2}}^{c} a_-^n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^c a_+^n(t)\,\mathrm{d}t\right). \qquad (35)$$

Когда принята гипотеза II для пространства произвольной размерности плотность вероятности случайной величины r есть

$$\hat{p}(r) = \mathrm{const} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{d + cd},$$

а оценка погрешности приближения после применения точной релаксации задается формулой (26). Таким образом, плотность вероятности случайной величины $z = d^*(r)$ есть

$$q(z) = \frac{b'_-(z) - b'_+(z)}{d + cd}, \qquad (36)$$

где b_-, b_+ берутся из (30) и (31) соответственно. По предыдущей схеме получим расчетную формулу для математического ожидания:

$$\mathrm{E}\, z = \frac{1}{d + cd}\int_0^{cd} z\mathrm{d}[b_-(z) - b_+(z)] = \frac{1}{d + cd}\int_0^{cd} [b_+(z) - b_-(z)]\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{d}{1+c}\left[\int_0^c a_+(z)\,\mathrm{d}z - \int_{c/\sqrt{1+c^2}}^{c} a_-(z)]\mathrm{d}z\right] - \Xi,$$

где

$$\Xi = \frac{1}{d+cd}\int_0^{cd/\sqrt{1+c^2}} z\Big(\frac{1}{c} - c\Big)\,\mathrm{d}z = \frac{cd}{2}\,\frac{1-c}{1+c^2}\ .$$

Откуда следует расчетная формула для коэффициента эффективности:

$$e = \frac{1}{c+c^2}\left[\int_0^c a_+(z)\,\mathrm{d}z - \int_{c/\sqrt{1+c^2}}^{c} a_-(z)\,\mathrm{d}z\right] - \frac{1-c}{2+2c^2} \qquad (37)$$

(a_-, a_+ берутся из (33) и (34) соответственно). ■

Аналитическая оценка выражений в правых частях формул (35) и (37) с использованием (33), (34) затруднительна. Бесхитростная программа на языке C доставляет значения коэффициента эффективности при некоторых значениях параметра c $(n = \overline{1,8})$ в случае действия гипотезы I и не зависимо от размерности в случае действия гипотезы II.

Т а б л и ц а

Коэффициентов эффективности

c / n	0,090	0,220	0,350	0,480	0,610	0,740	0,870	1.000
1	0,459	0,410	0,370	0,338	0,311	0,287	0,267	0,250
8	0,815	0,716	0,632	0,565	0,512	0,470	0,435	0,406
7	0,817	0,733	0,657	0,593	0,539	0,496	0,460	0,430
6	0,815	0,749	0,684	0,623	0,571	0,527	0,489	0,457
5	0,808	0,762	0,710	0,658	0,608	0,564	0,525	0,491
4	0,791	0,768	0,734	0,694	0,651	0,609	0,570	0,533
3	0,757	0,757	0,746	0,726	0,697	0,664	0,627	0,589
2	0,687	0,710	0,727	0,734	0,732	0,721	0,700	0,667
Гип. II	0,526	0,565	0,603	0,642	0,680	0,717	0,752	0,785

Примечательно, что точная релаксация позволяет вести итерации в тех случаях, когда метод простой итерации не имеет сходимости ($c = 1$).

§4. Асимптотика релаксации

Мы исследовали вероятностные характеристики оценки погрешности после применения точной релаксации при разных гипотезах, но остался открытым вопрос об их изменении после нескольких итераций с помощью точной релаксации. Рассмотрим его.

Плотность вероятности $q(z,d)$ оценки $z = d^*$ принимает ненулевые значения на интервале $(0, cd)$. Положим

$$q_1(z) = q(z, 1).$$

В силу формул (25), (28) — (32) или же формул (30), (31), (36)

$$dq(td, d) = q_1(t), \tag{38}$$

либо (в другом виде)

$$q(z,d) = \frac{q_1(z/d)}{d}. \tag{39}$$

Можно представить существование и других гипотез, обеспечивающих равенства (38), (39). Объединяет их всех следующее

Определение 3. Будем называть гипотезу о распределении случайной величины $\mathcal{A}(x)$, когда известно приближение x и его оценка $d \geq ||x - \alpha||$ (α — неподвижная точка алгоритма $\mathcal{A}$), *масштабируемой*, если плотность вероятности $q(z,d)$ этой случайной величины удовлетворяет равенству (39) для всех $z, d > 0$. ■

Пусть теперь на k-м итеративном шаге оценка погрешности не детерминирована, а случайна с плотностью вероятности $s(d)$, принимающей ненулевые значения только в интервале $(0, \widehat{d})$. В нашем методе для одномерного случая $\widehat{d} = \left(\dfrac{c}{1+c}\right)^k d_0$, для многомерного $\widehat{d} = c^k d_0$. Какова будет плотность вероятности s^* оценок погрешностей после применения точной релаксации при условии выполнения масштабируемой гипотезы? Оказывается,

$$s^*(t) = \int_{t/c}^{\widehat{d}} s(d) \frac{q_1(t/d)}{d}\, \mathrm{d}d. \tag{40}$$

Действительно, для реализации на $(k{+}1)$-м шаге оценки $t \doteq d^*$ необходимо, чтобы на предыдущем шаге случилась оценка $d \doteq d_k$ не менее t/c, следовательно, $d \notin [t/c, \widehat{d}] \Rightarrow s(d) = 0$. С другой стороны, плотность вероятности события t при реализации события d есть $s(d)q(t,d)$. И $s^*(t) = \int_{t/c}^{\widehat{d}} s(d)q(t,d)\,\mathrm{d}d$. Далее применяем формулу (39).

З а м е ч а н и е. Формула (40) верна также и на первом шаге, когда оценка является детерминированным числом. Тогда s есть δ-функция: $s = \delta(d - d_0)$, и из (39) следует $s^*(t) = q_1(t/d_0)/d_0$.

Теорема 3. *В условиях масштабируемой гипотезы математическое ожидание оценки погрешности после применения модификации алгоритма связано с текущим математическим ожиданием оценки погрешности формулами*

$$\mathrm{E}\,d^* = \mathrm{E}\,d\,\mu, \qquad \mu \doteq \int_0^c tq_1(t)\,\mathrm{d}t. \tag{41}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Плотность вероятности s^* новой оценки d^* в силу (40) принимает ненулевые значения только в интервале $(0, c\widehat{d})$. Поэтому математическое ожидание величины $t = d^*$ есть

$$\mathrm{E}\,t = \int_0^{c\widehat{d}} ts^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{c\widehat{d}} \int_{t/c}^{\widehat{d}} ts(d)\frac{q_1(t/d)}{d}\,\mathrm{d}d\,\mathrm{d}t. \tag{42}$$

Поменяем порядок интегрирования в (42):

$$\mathrm{E}\,t = \int_0^{\widehat{d}} \int_0^{dc} ts(d)\frac{q_1(t/d)}{d}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}d.$$

После подстановки $t = ud$ имеем

$$\mathrm{E}\,t = \int_0^{\widehat{d}} ts(d)\Big(\int_0^c tq_1(t)\,\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}d = \mathrm{E}\,d\,\mu = \mathrm{E}\,d_k\,\mu.$$

Следствие. *Применив k раз теорему 3, получим*

$$\mathrm{E}\,d_k = d_0\mu^k$$

(*здесь μ вычисляется в силу* (41); *величина d_0 детерминирована*).

З а м е ч а н и е. Коэффициенты эффективности e связаны с параметром μ соотношением $ce = \mu$. Таким образом, таблица эффективности содержит значения дроби μ/c. ■

Поскольку оценка d_k распределена на сегменте $[0, c^k d_0]$, зная ее математическое ожидание, можно оценить ее дисперсию.

Теорема 4. *Дисперсия оценки погрешности k-го итеративного приближения, порождаемого релаксационной модификацией, удовлетворяет соотношению*

$$\mathrm{D} d_{k+1} \leq \mathrm{E}\, d_k(c^k - \mathrm{E}\, d_k) = d_0(c^k - \mu^k)\mu^k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим плотность вероятности $s(t)$, принимающую ненулевые значения в интервале $(0, a)$, которая бы соответствовала случайной величине t, реализующей максимум дисперсии при фиксированном математическом ожидании $\mathrm{E}\, t$. Интерпретируем для облегчения терминологии это распределение как распределение некоторой единичной массы на отрезке $[a_1, a_2]$, $a_1 = -\mathrm{E}\, h$, $a_2 - a_1 = a$, с плотностью $m(h) = s(h + \mathrm{E}\, t)$. Другими словами, начало координат разместим в центре тяжести.

Пусть имеется ненулевая масса m_0 в произвольно малой окрестности точки $h_0 \in (a_1, a_2) \setminus \{0\}$. Положим для определенности $h_0 > 0$. Сместим эту массу вправо в точку $h \in (h_0, a_2)$, уменьшив ее до m_h и одновременно увеличив массу в точке a_1 на m_1 так, чтобы общая масса не изменилась:

$$m_1 + m_h = m_0$$

и центр тяжести не сместился:

$$a_1 m_1 + h m_h - h_0 m_0 = 0.$$

Отсюда

$$m_h = \frac{h_0 - a_1}{h - a_1} m_0.$$

И тогда зависимый от h вклад (Δ) этой перераспределяемой массы в момент инерции (дисперсию) есть

$$\Delta = a_1^2 m_1 + h^2 m_h = a_1^2 m_0 + (h^2 - a_1^2) m_h = a_1^2 m_0 + (h + a_1)(h_0 - a_1) m_0.$$

Поэтому вклад будет наибольшим тогда, когда $h = a_2$. Откуда следует, что в максимизирующем распределении $m_h = 0$,

$h \in (0, a_2)$. (Отметим, когда $h = h_0$ вклад равен убыли момента инерции от изъятия массы из окрестности h_0: $\Delta = h_0^2 m_0$, что, впрочем, и надо было ожидать.)

Аналогично получим $m_h = 0$, $h \in (a_1, 0)$.

Расщепив массу, если она есть, в нуле на две равные части и раздвинув их на $h = \min(-a_1, a_2)$, получим увеличение дисперсии на $h^2 m(0)$ при сохранении математического ожидания. Таким образом, в максимизирующем распределении масса должна быть сосредоточена на концах отрезка $[a_1, a_2]$. Выясним, сколько на каждом.

Пусть m_1 — масса на левом конце, m_2 — на правом. Тогда соотношения $m_1 + m_2 = 1$ и $m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$ дают

$$m_1 = \frac{a_2}{a_2 - a_1}, \qquad m_2 = \frac{a_1}{a_1 - a_2},$$

и наибольшая дисперсия есть

$$\mathrm{D} d_{k+1} = \frac{a_1^2 a_2}{a_2 - a_1} - \frac{a_2^2 a_1}{a_2 - a_1} = -a_1 a_2 \overset{T.3}{=} \mathrm{E}\, y\, (c^k d_0 - \mathrm{E}\, y). \qquad \blacksquare$$

Заключение. Теоремы о математическом ожидании и дисперсии погрешности дают ясную картину процесса сходимости. На ее основе по таблице коэффициентов эффективности и формулам трудоемкости (см. [3]) можно определить а приори круг задач, в которых целесообразно применение точной релаксации. Низкая трудоемкость точной релаксации делает этот круг весьма широким.

Указатель литературы

1. *Miheev S. E.* Relaxation Acceleration in Iterative Methods // Proceedings volume from the 11^{th} IFAC Workshop “Control Applications of Optmization 2000”. 2000. Vol. 1. P. 243–248.

2. *Miheev S. E.* Релаксационное ускорение // Деп. ВИНИТИ №2089-В98 от 3 июля 1998. 11 с.

3. *Михеев С. Е.* Релаксационное ускорение на основе областей достижимости // Вестник СПбГУ. 1999. сер. 1, №3(15). С. 29–35.

Н.Д. Морозкин, Ю.Н. Морозкин

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО НАГРЕВА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЯ И НА НАИБОЛЬШУЮ ТЕМПЕРАТУРУ

Рассматривается одномерная задача оптимального по быстродействию управления нелинейным процессом нагрева с учетом ограничений на растягивающие и сжимающие термонапряжения и максимальную температуру. Учитываются свойства нагреваемых изделий (хрупкость, пластичность), а также нелинейная зависимость коэффициента теплопроводности и прочностных характеристик от температуры. Предлагается итерационный способ решения, основанный на сведении исходной нелинейной задачи к последовательности бесконечномерных задач быстродействия, описываемых линейными уравнениями состояния с нелинейными ограничениями на фазовые переменные. Доказана сходимость по состоянию (при фиксированных управлениях) последовательности решений линейных уравнений к решению исходного нелинейного уравнения в норме типа $W_2^{1,0}$. Полученная на каждой итерации бесконечномерная задача быстродействия аппроксимируется конечномерной задачей, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными фазовыми ограничениями, которая решается с помощью модификации многошагового двойственного алгоритма, предложенного Н.Е. Кириным. Доказана сходимость конечномерных приближений по состоянию, по функционалу быстродействия и слабая сходимость последовательности управлений к множеству оптимальных управлений. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Введение

Известно, что при высокотемпературном нагреве теплофизические параметры нагреваемых материалов (пределы прочности, коэффициент теплопроводности и др.) претерпевают значительные изменения. Однако, в виду сложности соответствующих выкладок, при исследовании задач оптимального нагрева с фазовыми ограничениями эти факторы, как правило, не учитываются, либо учитываются частично, не в полной мере. Так, в работе [1] исследуется линейная задача оптимального нагрева с фазовыми ограничениями без учета сжимающих напряжений и без учета зависимости предела прочности от температуры. В работе [2] рассматриваются задачи линейного одномерного нагрева с учетом сжимающих и растягивающих термонапряжений и линейной зависимости предела прочности от температуры. Решение задачи находится при допущении, что оптимальный нагрев можно осуществить, двигаясь только по верхним границам наложенных ограничений.

В настоящей работе развивается подход, предложенный в [3,4]. Исходная нелинейная задача с использованием метода последовательных приближений [5] сведена к итерационному процессу, где на каждом шаге решается задача, описываемая линейным уравнением параболического типа с нелинейными фазовыми ограничениями. Доказана сходимость решений задач, построенных таким образом, к решению исходной задачи в норме типа нормы $W_2^{1,0}$. Задача оптимального управления с линейным уравнением состояния с помощью метода конечного интегрального преобразования Фурье записывается в виде ряда, коэффициенты которого находятся из решения бесконечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными фазовыми ограничениями. Полученная система естественным образом аппроксимируется конечномерной, которая решается с помощью многошагового двойственного алгоритма [9], модифицированного на случай нелинейных выпуклых фазовых ограничений. Получены априорные оценки погрешности конечномерной аппроксимации в норме пространства L_2. Доказаны теоремы о сходимости конечномерных приближений по функционалу быстродействия и о слабой сходимости управлений к множеству оптимальных. Предложенный алгоритм реализован на компьютере. Проведенные вычислительные эксперименты показали высокую эффективность используемого подхода.

1. Постановка задачи

Процесс нагрева пластины внешними тепловыми источниками описывается следующими соотношениями

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,\bar{t}), \quad 0 < \bar{t} < \infty, \qquad (1.1)$$

$$T(x,0) = T^0 = const, \quad x \in [0,l], \tag{1.2}$$

$$\lambda(T)\frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = \alpha(\nu(\tau) - T(l,t)), \quad t \in [0,\bar{t}], \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in [0,\bar{t}], \tag{1.4}$$

где T – температура (^0C), t – время, c – коэффициент теплоемкости, ρ – плотность, λ – коэффициент теплопроводности, l – толщина пластины, x – пространственная координата, α – коэффициент теплообмена, ν – управление, $\nu(t) \in V,\ V = \{\nu = \nu(t) :\ \nu(t) \in L_2[0,\bar{t}],\ 0 \le \nu^- \le \nu^+\}$.

Предположим, что в промежутке изменения температур $[T_1,\, T_2]$ функция $\lambda(T)$ положительна и имеет ограниченную производную по T. Кроме того, предположим, что

$$0 < \beta_1 \le \lambda(T) \le \beta_2, \quad \forall T \in [T_1,\, T_2]. \tag{1.5}$$

При указанных условиях система уравнений (1.1) - (1.4) при каждом фиксированном $\nu(t) \in V$ имеет обобщенное решение из пространства $V_2^{1,0}(\mathcal{Q}_{\bar{t}})$ [6], где $\mathcal{Q}_{\bar{t}} = \{(x,t) :\ x \in (0,l),\ t \in (0,\bar{t})\}$.

По условию задачи недопустимо, чтобы нагреваемое тело в процессе нагрева получило бы необратимые деформации. В настоящей работе рассматривается два вида материалов:

1) материалы, разрушающиеся при нагреве хрупко, без сколь-нибудь заметных деформаций;

2) материалы, переходящие под воздействием термонапряжений в пластическое состояние.

Задача термоупругости в квазистатической постановке и в предположении, что $\alpha_T,\ E$ не зависят от температуры решается аналитически. Анализ термонапряжений показывает [2,7], что в условиях рассматриваемой задачи растягивающие напряжения наибольших значений достигают на оси, а сжимающие - на поверхности нагреваемого тела. С учетом вышесказанного ограничения на термонапряжения можно записать в виде

$$\frac{\alpha_T E}{1-\nu}\big(-T(0,t) + \frac{1+3\Gamma}{l}\int\limits_0^l T(\xi,t)d\xi - \frac{6\Gamma}{l^2}\int\limits_0^l \xi T(\xi,t)d\xi \big) \le \sigma_1(T(0,t)), \tag{1.6}$$

$$\frac{\alpha_T E}{1-\nu}\big(T(l,t) - \frac{1-3\Gamma}{l}\int\limits_0^l T(\xi,t)d\xi - \frac{6\Gamma}{l^2}\int\limits_0^l \xi T(\xi,t)d\xi\big) \le \sigma_2(T(l,t)), \tag{1.7}$$

где $\sigma_1(T(0,t)) = \begin{cases} \sigma_p(T(0,t)), & \textit{для хрупких материалов,} \\ \sigma_{0.2}(T(0,t)), & \textit{для пластичных материалов,} \end{cases}$

$$\sigma_2(T(l,t)) = \begin{cases} \sigma_c(T(l,t)), & \textit{для хрупких материалов,} \\ \sigma_{0.2}(T(l,t)), & \textit{для пластичных материалов.} \end{cases}$$

Здесь α_T – коэффициент линейного расширения, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, параметр $\Gamma \in [0,1]$ характеризует степень защемления от поворота краев пластины, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$, $\sigma_{0.2}(T)$ – пределы прочности на растяжение, сжатие и предел текучести, соответственно.

Кроме выполнения неравенств (1.6), (1.7) потребуем выполнения ограничения на максимальную температуру в теле, которая в рассматриваемом случае внешнего нагрева достигается на поверхности

$$T(l,t) \le T^{\text{доп}}. \tag{1.8}$$

Задача 1. *Найти управление* $\nu^0(t) \in V,\ t \in [0,t^0]$, *переводящее за минимальное время* $t^0,\ 0 < t^0 \le \bar{t}$, *систему* (1.1), (1.3), (1.4) *из начального положения* (1.2) *в заданное конечное положение* $\hat{T}(x)$ *с фиксированной точностью*

$$\int\limits_0^l \big[T(x,t^0,\nu^0) - \hat{T}(x)\big]^2 dx \le \varepsilon, \quad \varepsilon \ge 0,$$

так, чтобы при всех $t \in [\varphi, t^0]$, $\varphi = const > 0$, *были бы выполнены неравенства* (1.6)-(1.8).

2. Линеаризация. Сходимость итерационного процесса по состоянию

Для решения поставленной задачи воспользуемся идеей метода последовательных приближений, изложенной в работе [5]. В силу принципа максимума [6]

$$m \le T(x,t) \le M, \tag{2.1}$$

где $M = \max\big\{\max\limits_{t\in[0,\bar{t}]} \nu(t),\ T^0\big\}, \quad m = \min\big\{\min\limits_{t\in[0,\bar{t}]} \nu(t),\ T^0\big\}.$

Пусть $T_1 = m,\ T_2 = M,$

$$\lambda_0 = (\beta_1 + \beta_2)/2. \tag{2.2.}$$

Системе уравнений (1.1)-(1.4) поставим в соответствие следующий итерационный процесс

$$c\rho \frac{\partial T_{k+1}}{\partial t} - \lambda_0 \frac{\partial^2 T_{k+1}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\big((\lambda(T_k) - \lambda_0)\frac{\partial T_k}{\partial x}\big), \tag{2.3}$$

$$T_{k+1}(x,0) = T^0, \quad x \in [0,l], \tag{2.4}$$

$$\lambda_0 \frac{\partial T_{k+1}}{\partial x} - \alpha(\nu(t) - T_{k+1}(x,t))|_{x=l} = (\lambda_0 - \lambda(T_k))\frac{\partial T_k}{\partial x}\big|_{x=l}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial T_{k+1}}{\partial x}\big|_{x=0} = 0. \tag{2.6}$$

Решение задачи (1.1)-(1.4) будем искать как предел решений задач (2.3)-(2.6) в пространстве $W_2^{1,0}(\mathcal{Q}_{\bar{t}})$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $\lambda(T)$ положительна, удовлетворяет соотношению (1.5) и имеет ограниченную по* T *производную на отрезке $[T_1, T_2]$. Тогда при любом фиксированном управлении $\nu(t) \in V$ решения T_{k+1} системы уравнений* (2.3)-(2.6) *сходятся при $k \to \infty$ к решению системы* (1.1)-(1.4) *в норме типа $W_2^{1,0}$.*

3. Задача быстродействия с линейным уравнением состояния и нелинейными фазовыми ограничениями

Для удобства последующих выкладок запишем систему уравнений (2.3)-(2.6) и ограничения (1.6),(1.7) в безразмерных единицах. Вводя обозначение $a_0 = \lambda_0/c\rho$ и безразмерные переменные

$$u = \alpha_T(\nu - T^0),\ u^- = \alpha_T(\nu^- - T^0),\ u^+ = \alpha_T(\nu^+ - T^0),$$

$$r = \frac{x}{l},\ \theta = \alpha_T(T - T^0),\ \tau = \frac{a_0 t}{l^2},\ \sigma_1^* = (1-\nu)\sigma_1/E,\ \sigma_2^* = (1-\nu)\sigma_2/E, \tag{3.1}$$

$$\theta^{\text{доп}} = \alpha_T(T^{\text{доп}} - T^0),\ \bar{T} = a_0\bar{t}/l^2,\ Bi = \frac{\alpha l}{\lambda_0},\ \hat{\theta} = \alpha_T(\hat{T} - T^0),$$

получим

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\big[\big(\frac{\lambda(\theta_{k-1})}{\lambda_0} - 1\big)\frac{\partial \theta_{k-1}}{\partial r}\big],\ r \in (0,1),\ \tau \in (0,\bar{T}), \tag{3.2}$$

$$\theta_k(r,0)=0,\quad r\in[0,1], \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial\theta_k}{\partial r}\Big|_{r=1}=Bi(u(\tau)-\theta_k(1,\tau))+\frac{\lambda_0-\lambda(\theta_{k-1})}{\lambda_0}\frac{\partial\theta_{k-1}}{\partial r}\Big|_{r=1}, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial\theta_k}{\partial r}\Big|_{r=0}=0, \tag{3.5}$$

$$-\theta_k(0,\tau)+(1+3\Gamma)\int\limits_0^1\theta_k(\xi,\tau)d\xi+6\Gamma\int\limits_0^1\xi\theta_k(\xi,\tau)d\xi\le\sigma_1^*(\theta_k(0,\tau)), \tag{3.6}$$

$$\theta_k(1,\tau)-(1-3\Gamma)\int\limits_0^1\theta_k(\xi,\tau)d\xi-6\Gamma\int\limits_0^1\xi\theta_k(\xi,\tau)d\xi\le\sigma_2^*(\theta_k(1,\tau)). \tag{3.7}$$

Ограничения на максимальную температуру соответственно будут иметь вид

$$\theta_k(1,\tau)\le\theta^{\text{ доп }}. \tag{3.8}$$

3.1. Конечномерная аппроксимация. Воспользовавшись конечным интегральным преобразованием Фурье

$$\theta_F(\mu,\tau)=\int\limits_0^1\theta(r,\tau)\mathrm{cos}(\mu\mathrm{r})\mathrm{dr}, \tag{3.9}$$

запишем решение системы уравнений (3.2)-(3.5) в виде ряда

$$\theta_k(r,\tau,u)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n x_n^{(k)}(u,\tau)\mathrm{cos}(\mu_\mathrm{n}\mathrm{r}), \tag{3.10}$$

где $D_n=\dfrac{2Bi}{(\mu_n^2+Bi^2+Bi)\mathrm{cos}(\mu_\mathrm{n})}$, $\mu_n\ge0$ – корни уравнения

$$Bi\mathrm{cos}(\mu_\mathrm{n})=\mu_\mathrm{n}\mathrm{sin}(\mu_\mathrm{n}) \tag{3.11}$$

$x_n^{(k)}(u,\tau),\quad n=1,2,\,...$ – компоненты вектора решений бесконечной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_n^{(k)}}{d\tau}=-\mu_n^2x_n^{(k)}+\mu_n^2(u+I_n^{(k-1)}),\quad x_n^{(k)}(0)=0, \tag{3.12}$$

$$I_n^{(k-1)} = \int\limits_0^1 \big(\frac{\lambda(\theta_{k-1})}{\lambda_0} - 1\big)\frac{\partial\theta_{k-1}}{\partial r}\frac{\sin(\mu_{\rm n}{\rm r})}{\sin(\mu_{\rm n})}dr.$$

Неравенства (3.6)-(3.7) примут вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{in}x_n^{(k)} - e_i \le 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.13}$$

где $c_{3n} = F_n = \dfrac{2Bi}{\mu_n^2 + Bi^2 + Bi}$,

$$c_{2n} = F_n\big(1 - \frac{6\Gamma}{\mu_n^2} - \frac{(1+3\Gamma)Bi}{\mu_n^2} + \frac{6\Gamma}{\mu_n^2 \cos(\mu_{\rm n})}\big), \tag{3.14}$$

$$c_{1n} = F_n\big(\frac{(1-3\Gamma)Bi - 6\Gamma}{\mu_n^2} - \frac{1}{\cos(\mu_{\rm n})}\big(1 - \frac{6\Gamma}{\mu_n^2}\big)\big),$$

$$e_1 = \sigma_1\big(\sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n^{(k)}\big), \quad e_2 = \sigma_2\big(\sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n^{(k)} \cos(\mu_{\rm n})\big), \quad {\rm e}_3 = \theta^{\text{ доп}},$$

$$\Gamma \in [0, 1].$$

Система функций $\{\cos(\mu_{\rm n}{\rm r})\}$ ортогональна и полна в пространстве $L_2[0,1]$, поэтому почти при всех $r \in [0,1]$ для функции $\hat\theta(r)$ справедливо разложение

$$\hat\theta(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|\cos(\mu_{\rm n}{\rm r})\|^2} g_n \cos(\mu_{\rm n}{\rm r}), \tag{3.15}$$

где $g_n = \int\limits_0^1 \hat\theta(r)\cos(\mu_{\rm n}{\rm r}){\rm dr}$.

Очевидно, что задача 1 эквивалентна следующей:

Задача 2. *Перевести фазовую точку* $(x_1^{(k)}, ..., x_n^{(k)}, ...)$ *из состояния* $(0, ..., 0, ...)$ *в шар* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|\cos(\mu_{\rm n}{\rm r})\|^2}\big(x_n \frac{\sin(\mu_{\rm n})}{\mu_n} - g_n\big)^2 \le \varepsilon$ *по траекториям системы* (3.12) *за минимальное время* $\tau^0 \in (0, \bar T]$ *с соблюдением при всех* $\tau \in [\varphi, \tau^0]$ *ограничений* (3.13).

Аналогично работе [7] можно показать, что функция $\theta(r, \tau, u)$ определяемая по формуле (3.10), при каждом фиксированном $u \in U$ является обобщенным решением системы уравнений (3.2)-(3.5) в пространстве $V_2^{1,0}(\mathcal{Q}_T)$, где $U = \{u = u(\tau) : \ u(\tau) \in L_2[0, \bar{T}], u^- \le u(\tau) \le u^+\}$.

Сформулируем конечномерную задачу оптимального управления. Ограничившись в соотношениях (3.10), (3.12), (3.13) первыми N членами, получим

$$\frac{dx^N}{d\tau} = -A^N(x^N - I^N) + B^N u, \quad x^N(0) = 0_{R^N}, \tag{3.16}$$

$$c^N x^N \le E(x^N), \tag{3.17}$$

где $(x^N - I^N) = (x_1^{(k)} - I_1^{(k-1)}, ..., x_N^{(k)} - I_N^{(k-1)})$ – N-мерная вектор-функция; $A^N = diag(\mu_1^2, ..., \mu_N^2)$ диагональная матрица $N \times N$, $B^N = (\mu_1^2, ..., \mu_N^2)^T$, c^N - матрица $(3 \times N)$ с элементами c_{in}, $i = 1, 2, 3$; $n = \overline{1, N}$, $E = (e_1(x^N), e_2(x^N), e_3(x^N))^T$.

Бесконечномерной задаче 2 поставим в соответствие следующую конечномерную задачу 3.

Задача 3. *Найти управление* $u^N \in U$, *переводящее систему* (3.16) *за минимальное время* $\tau^N \in (0, \bar{T}]$ *из положения* 0_{R^N} *в множество* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|\cos(\mu_n \mathrm{r})\|^2} \left(x_n^{(k)} \frac{\sin(\mu_n)}{\mu_n} - g_n\right)^2 \le \varepsilon$ *при выполнении для всех* $\tau \in [\varphi, \tau^N]$ *ограничений* (3.17).

3.2. Априорные оценки погрешности аппроксимации по состоянию. Пусть $\theta_k(r, \tau, \bar{u})$, $r \in [0, 1]$, $\tau \in [0, \bar{T}]$ - решение системы уравнений (3.2)-(3.5) при некотором фиксированном $\bar{u}(\tau) \in U$, а $\theta_k^N(r, \tau, \bar{u})$, $r \in [0, 1]$, $\tau \in [0, \bar{T}]$ - конечномерное приближение этого решения. Тогда, учитывая вид (3.10) функции $\theta_k(r, \tau, u)$, выпишем погрешность аппроксимации:

$$\gamma(r, \tau) = \theta_k(r, \tau, \bar{u}) - \theta_k^N(r, \tau, \bar{u}) = \sum_{n=N+1}^{\infty} D_n x_n^{(k)}(\bar{u}, \tau) \cos(\mu_n \mathrm{r}).$$

Теорема 2. *Для нормы погрешности аппроксимации по состоянию в пространстве* $L_2(\mathcal{Q}_T)$ *справедлива оценка*

$$\|\gamma\|_{L_2(\mathcal{Q}_T)} \le \frac{Cu^+ Bi\sqrt{2\bar{\bar{T}}}}{3\pi^2\sqrt{N^3}}, \quad N \ge 2, \quad C = const.$$

Отметим, что обычно в рассматриваемой задаче пользуются укороченной системой первых двух-трех уравнений в (3.12) [1], и, именно, для этого случая разработаны конструктивные методы поиска оптимального управления. Однако, ввиду медленной сходимости рядов, входящих в ограничения (3.13), для обеспечения удовлетворительной точности решения задачи с фазовыми ограничениями необходимо решать конечномерную задачу большей размерности. В пункте 4 будет приведен алгоритм, являющийся модификацией многошагового двойственного алгоритма Н.Е. Кирина, позволяющего решать конечномерную задачу независимо от размерности N.

3.3. Сходимость конечномерных аппроксимаций. Исследуем вопросы, связанные со сходимостью конечномерных аппроксимаций. Выпишем условия, при которых конечномерные приближения сходятся по функционалу быстродействия, а соответствующая подпоследовательность управлений, полученная из решения конечномерных задач, слабо в L_2 сходится к множеству оптимальных управлений. Будем рассматривать наиболее важный с практической точки зрения случай, когда закрепление концов пластины препятствует ее изгибу, т.е. случай Γ=0.

Теорема 3. *Пусть исходная бесконечномерная задача при* Γ=0 *имеет решение и имеют место неравенства*

$$u^+ > 2e^{-\frac{1}{2}}(u^+ - u^-),$$

$$u^- \geq u^+ \frac{(\beta_2-\beta_1)^2}{\beta_2+\beta_1}\big(1 - \frac{1}{\cos(\mu_2)}\big) \max\{\frac{1}{2\beta_1}, \frac{1}{\beta_2-\beta_1}\}.$$

Пусть при $\xi \geq 0$ *функции* $\sigma_i(\xi)$ *- равномерно непрерывны,* $i = 1, 2$; $\sigma_1(\xi)$ *- монотонная,* $\sigma_2(\xi)$ *- невозрастающая функции. Тогда существует последовательность номеров* $\{N_p\}, p = 1, 2, 3, ...,$ *такая, что при любом* $N = N_p,\ p \geq 1$ *решение конечномерной задачи* 3 *существует и справедливы соотношения*

а) $0 < \varphi \leq \tau^{(N_1)} \leq \tau^{(N_2)} \leq \ ... \ \leq \tau^0$,

б) $\lim\limits_{p\to\infty} \tau^{(N_p)} = \tau^0$,

в) *предел любой слабосходящейся в* $L_2[0,\tau^0]$ *подпоследовательности из* $\{\,u^{(N_p)}(\tau)\}$ *является оптимальным управлением.*

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы [2] в работе [4], поэтому здесь мы его приводить не будем.

4. Решение конечномерной задачи быстродействия с нелинейными фазовыми ограничениями

Приведем численный алгоритм решения конечномерной задачи 3, сформулированной в п. 3.1. Алгоритм представляет собой последовательное уточнение нижней оценки времени оптимального быстродействия и основан на модификации многошагового двойственного алгоритма Н.Е. Кирина [9].

4.1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau)x + B(\tau)u + D(\tau), \quad \tau \in (0,T], \; x(0) = x_0 \neq 0_{R^N} \qquad (4.1)$$

с ограничениями на фазовые переменные и управление

$$F_i(x,u,\tau) \leq 0, \quad i = \overline{1,s}, \qquad (4.2)$$

где $x = x(\tau) = (x_1(\tau),\, ...,\, x_N(\tau))$ - N-мерная вектор-функция, $A(\tau)$, $B(\tau)$, $D(\tau)$ - известные матрицы размерности соответственно $(N \times N)$, $(N \times 1)$, $(N \times 1)$ с кусочно-непрерывными коэффициентами, $u = u(\tau) \in U$ - управление, $U = \{u(\tau) = (u_1(\tau),\, ...,\, u_m(\tau)) \in L_2^m[0,T],\; u_i^- \leq u_i(\tau) \leq u_i^+,\; i = \overline{1,m}\}$. Функции $F_i(x,u,\tau),\; i = \overline{1,s}$, - кусочно-непрерывны по τ, выпуклы по совокупности переменных (x,u) и имеют по этим переменным производные, удовлетворяющие условию Липшица по (x,u).

Задача 4. *Найти управление* $u^0(\tau) \in U$, *переводящее систему* (4.1) *из положения* x_0 *в положение* 0_{R^N} *за минимальное время* $\tau^0 \in (0,T]$ *так, чтобы почти при всех* $\tau \in [0,\tau^0]$ *выполнялись бы неравенства* (4.2).

Здесь $T > 0$ - некоторое конечное число, большее либо равное τ^0.

Сведем задачу 4 к задаче оптимального управления без ограничений на фазовые переменные. Для этого запишем ограничения (4.2) в виде $g(x(u,t),\nu(t),\tau) = 0_{R^s}$ почти при всех $t \in [0,\tau]$, где $g = (g_1,\, ...,\, g_s)$,

$$g(x(u,t),\nu_i(t),\tau) = \begin{cases} (\max\{F_i(x,u,t),0\})^2 = \nu_i(t), & t \in [0,\tau], \\ 0, & t \in (\tau,T], \end{cases} \qquad (4.3)$$

$\nu = \nu(t) = (\nu_1(t), ..., \nu_s(t))$ - вспомогательный управляющий параметр — измеримая вектор-функция, определенная на [0,T], с неотрицательными компонентами. Множество таких вектор-функций обозначим через V. Введем гильбертово пространство P с элементами $p = \{h(t), y\}_{t\in[0,T]}$, $h \in L_2^s[0,T]$, $y \in R^N$ и с нормой $\|p\|^2 = \int\limits_0^T (h(t), h(t))dt + (y, y)$. Обозначим $w = (u, \nu) \in U \times V = W$, $p(w, \tau) = \{g(x(u,t), \nu(t), \tau), x(u,t)\}_{t\in[0,T]}$, $x(u, 0) = x_0$. Очевидно, что $p(w, \tau)$ при любом фиксированном $\tau \in [0, T]$ является элементом пространства P. Задачу 4 можно переформулировать в пространстве P как задачу без ограничений:

Задача 5. *Найти наименьший момент времени* $\tau^0 \in [0, T]$ *и управление* $w^0 \in W$, *такие, что* $p(w^0, \tau^0) = (0_{L_2^s[0,T]}, 0_{R^N}) = 0_P$.

Рассмотрим множество (область достижимости в пространстве P) $S(\tau) = \{p(w, \tau) : \ w \in W\}$. Аналогично [7], можно показать, что в условиях задачи $S(\tau)$ - выпуклое множество. Очевидно, что момент времени τ^0 можно интерпретировать как кратчайшее время, при котором выполнится включение $0_P \in S(\tau)$, а, значит, $0_P \notin S(\tau)$, $\forall\, \tau < \tau^0$. Так как $S(\tau)$ выпуклое множество, то при любом $\tau < T_N$ существует опорная гиперплоскость, отделяющая точку 0_P^n от $S(\tau)$. На этом свойстве и базируется предложенный алгоритм, который позволяет строить последовательные оценки снизу времени быстродействия $\tau_1 < \tau_2 < \ ... \ < \tau_k \leq \tau^0$. Общая схема построения последовательности $\{\tau_k\}$ такова. Пусть удалось установить, что $\tau_k < \tau^0$. Тогда приближение τ_{k+1} определяется следующим образом:

1) Находится направление нормали Γ_k опорной гиперплоскости, строго разделяющей 0_P и множество $S(\tau_k)$;

2) Строится опорная к $S(\tau_k)$ гиперплоскость с нормалью Γ_k;

3) Построенная опорная гиперплоскость непрерывно переносится в опорную плоскость множества $S(\tau)$ при $\tau > \tau_k$ и определяется первый момент встречи ее с точкой 0_P. Этот момент и принимается за τ_{k+1}.

Отметим, что на указанной схеме Н. Е. Кириным [9] был предложен алгоритм решения линейной задачи быстродействия с линейными фазовыми ограничениями. Предложенный в данной работе алгоритм по сути является модификацией этого алгоритма.

4.2. Поиск нормали и построение опорной гиперплоскости. Одной из важных процедур в используемом алгоритме является нахождение нормали разделяющей гиперплоскости, так как при достаточной строгости отделения точки 0_P от множества достижимости $S(\tau_k)$ на шаге k обеспечивается хорошее продвижение по времени в п. 3) вышеуказанной схемы. В данной работе в качестве нормали на шаге k берется антиградиент функционала $\rho(p, \tau_k)$, характеризующего расстояние от точки 0_P до множества $S(\tau_k)$

$$\rho(p, \tau_k) = \sum_{i=1}^{s} \int_0^T g_i(x(u,t), u(t), \nu_i(t), \tau_k) dt + \frac{1}{2}(x(u, \tau_k), x(u, \tau_k)). \tag{4.4}$$

Если $\tau_k < \tau^0$, то направление нормали разделяющей гиперплоскости определяется по формуле

$$l_k = (-1_{L_2^s[0,T]}, -\hat{x}(\tau_k)), \tag{4.5}$$

где $\hat{x}$ находится из решения задачи $\rho(\hat{p}, \tau_k) = \inf\{\rho(p, \tau_k) : p \in S(\tau_k)\},\ \hat{p} = (\hat{g}, \hat{x})$.

Задача построения опорной к множеству $S(\tau_k)$ гиперплоскости с нормалью l_k в рассматриваемом гильбертовом пространстве P сводится к задаче максимизации функционала

$$\beta = \tilde{\beta}(\tau_k) = (l_k, \tilde{p}(w, \tau_k)) = \sup\{(l_k, p(w, \tau_k)) : \ w \in W\}. \tag{4.6}$$

Из соотношений (4.4)-(4.6) следует, что $\tilde{\nu} = 0_{L_2^s[0,T]}$. Тогда задачу (4.6) можно переписать в виде: *найти управление* $\tilde{u}(t) \in U$ *минимизирующее функционал*

$$J(u, \tau_k) = \sum_{i=1}^{s} \int_0^{\tau_k} (\max\{F_i(x, u, t), 0\})^2 dt + (\hat{x}, x(u, \tau_k)), \tag{4.7}$$

$$\text{т.е.} \quad J(\tilde{u}, \tau_k) = \min_{u \in U}(J(u, \tau_k)). \tag{4.8}$$

Очевидно, что $\tilde{\beta}(\tau_k) = -J(\tilde{u}, \tau_k)$. Решение задачи (4.8) будем искать методом условного градиента. Условия сходимости этого метода, применительно к рассматриваемой задаче, следующие (теорема 6 [8, с.80]): требуется, чтобы функционал (4.7) был выпуклым, непрерывно-дифференцируемым по u, а его градиент удовлетворял условию Липшица по u. Аналогично работе [8] можно показать, что функционал (4.7) удовлетворяет этим требованиям. Используя методику [8], выпишем формулу для вычисления градиента функционала (4.7):

$$J'_u(u,t) = f_u^0(x(u,t),u(t),t) - B^T(t)\psi(t), \quad t \in [0,\tau_k], \tag{4.9}$$

где $\psi(t)$ - решение задачи

$$\frac{\psi}{dt} = f_x^0(x(u,t),u(t),t) - A^T(t)\psi(t), \quad t \in [0,\tau_k], \tag{4.10}$$

$$\psi(\tau_k) = -\hat{x}, \tag{4.11}$$

$$f_x^0(x,u,t) = 2\sum_{i=1}^{s}(F_i(x,u,t))'_x \max(F(x(u,t),u,t),0), \tag{4.12}$$

$$f_u^0(x,u,t) = 2\sum_{i=1}^{s}(F_i(x,u,t))'_u \max(F(x(u,t),u,t),0). \tag{4.13}$$

4.3. Уточнение нижней оценки времени быстродействия. Для нахождения τ_{k+1} по τ_k при условии, что гиперплоскость $(l_k, p-\tilde{p}) = 0$, $\tilde{p} = p(\tilde{w},t)$ является разделяющей, следует непрерывно перенести ее в опорную гиперплоскость множества $S(\tau)$ при $\tau > \tau_k$ и определить первый момент времени $\tau\prime$, при котором она пройдет через точку 0_P, т.е. когда будет достигнуто равенство

$$\beta(\tau\prime) = (l(\tau\prime), p(\hat{w},\tau\prime)) = \sup\{(l(\tau\prime), p(w,\tau\prime)) : \ w \in W\} = 0. \tag{4.14}$$

В целях обеспечения непрерывного переноса опорной гиперплоскости множества $S(\tau)$ при $\tau > \tau_k$ положим $l(\tau) = (-1_{L_2^s[0,T]}, \psi(\tau))$, где $\psi(\tau)$, $\tau \in [\tau_k, \tau\prime]$ - решение системы (4.10) с начальным условием (4.11). Тогда управление $\hat{u}(\tau)$ в задаче (4.14) согласно принципа максимума Л. С. Понтрягина вычисляется по формуле

$$\hat{u}(\tau) = \frac{u^+ + u^-}{2} + \frac{u^+ - u^-}{2} sign(\psi(\tau), b(\tau)), \quad \tau \in [\tau_k, \tau\prime]. \tag{4.15}$$

4.4. Минимизация функционала типа расстояния. Укажем численный алгоритм нахождения $\hat{p}$ - точки минимума функционала (4.4) на выпуклой оболочке точек $p^{(j)} \in S(\tau_k)$, $j = \overline{1,\nu}$. С этой целью построим последовательность точек $\{z_{jn}\} \in S(\tau_k)$,

$z_{jn} = \{h_{jn}, y_{jn}\}$, $h_{jn} \in L_2^s$, $y_{jn} \in R^n$, $j = \overline{0,\nu}$, $n = 1, 2, \ldots$ так, чтобы $\rho(z_{jn}, \tau_k) = \min\limits_{\mu \in [0,1]} \rho(p^{(j)} + \mu(z_{(j-1)n} - p^{(j)}))$, $j = \overline{1,\nu}$.

Решение этой задачи с учетом конкретного вида функционала $\rho(p, \tau_k)$ записывается в виде $z_{jn} = (1 - \mu_{jn})p^{(j)} + \mu_{jn} z_{(j-1)n}$, $j = \overline{1,\nu}$, где μ_{ji} - число из отрезка [0,1], ближайшее к числу $\bar{\mu}_{jn}$:

$$\bar{\mu}_{jn} = \begin{cases} -\dfrac{H_{(j-1)n} - \theta^{(j)} + (y_{(j-1)n} - x^{(j)}, x^{(j)})}{(y_{(j-1)n} - x^{(j)}, y_{(j-1)n} - x^{(j)})}, & \text{если } x^{(j)} \neq y_{(j-1)n}, \\ 1, \quad \text{если } x^{(j)} = y_{(j-1)n} \text{ и } H_{(j-1)n} < \theta^{(j)}, & \\ 0, \quad \text{если } x^{(j)} = y_{(j-1)n} \text{ и } H_{(j-1)n} > \theta^{(j)}. & \end{cases}$$

Величины $\theta^{(j)} = \theta(u^{(j)}, \tau_k)$, $j = \overline{1,\nu}$, вычисляются по формуле

$$\theta^{(j)} = \theta(u^{(j)}, \tau_k) = \sum_{i=1}^{s} \int_0^{\tau_k} \left[\max\{F_i(x(u^{(j)}, t), u^{(j)}, t), 0\}\right]^2 dt, \qquad (4.16)$$

а величины H_{jn}, $j = \overline{0,\nu}$, $n = 1, 2, \ldots$ по следующим рекуррентным соотношениям $H_{jn} = \theta^{(j)} + \mu_{ji}(H_{(j-1)n} - \theta^{(j)})$, $j = \overline{1,\nu}$, $n = 1, 2, \ldots$ $H_{01} = \theta^{(1)}$. Цикл с номером n заканчивается построением точки $z_{\nu n}$. Управление $w_{jn}(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_k]$, соответствующее элементу z_{jn}, имеет вид $w_{jn}(\tau) = (0_{L_2^s}, u_{jn}(\tau))$, где $u_{jn}(\tau)$ в силу линейности системы (4.1) вычисляется по формуле $u_{jn}(\tau) = u^{(j)}(\tau) + \mu_{jn}(u_{(j-1)n}(\tau) - u^{(j)}(\tau))$, $j = \overline{1,s}$. Взяв полученную точку в качестве точки $z_{0(n+1)}$, цикл повторяем на шаге n+1. И так до тех пор, пока не выполнится неравенство $|\rho(z_{sn}, \tau_k) - \rho(z_{0n}, \tau_k)| \leq \varepsilon$, где ε - заданная точность выхода. Полученный элемент z_{sn} и принимается за $\hat{p}$–точку минимума функционала (4.4) на выпуклой оболочке точек $p^{(j)}$, $j = \overline{1,\nu}$. Отметим, что $p^{(j)} \in S(\tau_k)$ состоит из двух элементов: вектор-функций $g^{(j)}(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_k]$ и векторов $x^{(j)}(\tau_k)$. Вид функционала (4.4) позволяет при поиске точки $\hat{p}$ вместо вектор-функций $g^{(j)}(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_k]$ запоминать лишь числа $\theta^{(j)}$, определенные согласно (4.16), что важно с точки зрения рационального использования памяти компьютера. Поэтому в алгоритме решения задачи 4, приводимом ниже, вместо элементов $p^{(j)}$ будут запоминаться вектора $x^{(j)}$ и числа $\theta^{(j)}$.

4.5. Алгоритм. Опишем более подробно многошаговый двойственный алгоритм, основанный на методе корректировки опорной гиперплоскости. Пусть к шагу k известны: $\tau_k \leq \tau^0$, $u_k = u_k(\tau) \in U$,

$\tau \in [0, \tau_k]$, $x_k = x(u_k, \tau_k)$, $\theta_k = \theta(u_k, \tau_k)$, $x^{(j)} = x(u^{(j)}, \tau_k)$, $\theta^{(j)} = \theta(u^{(j)}, \tau_k)$, $j = \overline{3, \nu}$, где $\theta^{(j)}$ вычисляются по формуле (4.16), а

$$\theta_k = \theta(u_k, \tau_k) = \sum_{i=1}^{s} \int\limits_{0}^{\tau_k} \bigl(\max\{F_i(x(u_k, t), u_k, t), 0\}\bigr)^2 dt. \qquad (4.17)$$

Осуществим следующие операции:

1. Положив $l_k = (-1_{L_2^s[0,T]}, -x_k)$, и решив задачу (4.6), найдем управление $\tilde{w}(\tau) = (0_{L_2^s[0,T]}, \tilde{u}(\tau))$, $\tau \in [0, \tau_k]$, и элемент $\tilde{p} = p(\tilde{w}, \tau_k) \in S(\tau_k)$. Если $\tilde{\beta}(\tau_k) = (l_k, \tilde{p}) \geq 0$, то соответствующая опорная гиперплоскость не является разделяющей и, положив $\tau_{k+1} = \tau_k$, переходим к операции 5, иначе к операции 2.

2. Уточним нижнюю оценку времени быстродействия. Для этого интегрируем по возрастанию τ от $\tau = \tau_k$ систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = -A(\tau)x + B(\tau)u + D(\tau), \quad x(\tau_k) = x(\tilde{u}, \tau_k), \\[2ex] \dfrac{d\psi}{d\tau} = f_x^0(x, u, \tau) - A^T(\tau)\psi(\tau), \quad \psi(\tau_k) = -x_k, \end{cases}$$

при управлении $u = \tilde{u}(\tau)$, вычисляемом из следующего условия: $H(\psi, x, \tilde{u}, \tau) = \max\limits_{u \in U} H(\psi, x, u, \tau)$. Здесь

$$f_x^0(x, u, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{s} (F_i(x, u, \tau))'_x \max\{F_i(x, u, \tau), 0\}$$

$$H(\psi, x, u, \tau) = -\sum_{i=1}^{s} \bigl[\max\{F_i(x, u, \tau), 0\}\bigr]^2 + \psi^T(-A(\tau)x + B(\tau)u).$$

Интегрирование ведется до первого момента $\tau^* > \tau_k$, при котором выполнится неравенство $(\psi(\tilde{u}, \tau^*), x(\tilde{u}, \tau^*)) - \theta(\tilde{u}, \tau^*) \geq 0$, означающее, что опорная гиперплоскость прошла через точку 0_P. Этот момент и принимается за τ_{k+1}.

3. Область достижимости рассматриваемой задачи может оказаться немонотонной, т.е. $S(\tau_1) \notin S(\tau_2)$ при $\tau_2 > \tau_1$. Поэтому доинтегрируем на промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ систему (4.1) с начальными условиями $x(\tau_k) = x_k$ и 7 с некоторым управлением $\bar{u} \in U$. Параллельно по формулам (4.16), (4.17) вычислим $\theta_k(\tau_{k+1})$ и $\theta^{(j)}(\tau_{k+1})$ при соответствующих управлениях

$$u_k = \begin{cases} u_k(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_k], \\[2ex] \bar{u}(\tau), \quad \tau \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \end{cases}$$

$$u^{(j)} = \begin{cases} u^{(j)}(\tau), & \tau \in [0, \tau_k], \\ \\ \bar{u}(\tau), & \tau \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \end{cases} \qquad j = \overline{3, \nu}.$$

4. Согласно п.1 алгоритма построим опорную к множеству $S(\tau_{k+1})$ гиперплоскость с нормалью $l_k = (-1_{L_2^s[0,T]}, -x_k(\tau_{k+1}))$, т.е. решим задачу $(l, \tilde{p}) = (l, p(\tilde{w}, \tau_{k+1})) = \sup\{(l, p(w, \tau_{k+1})) : \ w \in W\}$. Вычислим

$$\tilde{\theta}(\tau_{k+1}) = \theta(\tilde{u}, \tau_{k+1}) = \sum_{i=1}^{s} \int\limits_0^{\tau_{k+1}} \big(\max\{F_i(x(\tilde{u}, t), \tilde{u}, t), 0\}\big)^2 dt.$$

5. Положив $x^{(1)} = x(\tilde{u}, \tau_{k+1})$, $x^{(2)} = x_k(\tau_{k+1})$, $\theta^{(1)} = \tilde{\theta}(\tau_{k+1})$, $\theta^{(2)} = \theta(\tau_{k+1})$, найдем согласно п.4.4 алгоритма точку $\hat{p}$. Если $\rho(\hat{p}, \tau_{k+1}) < \varepsilon_1$, где ε_1 - заданная точность выхода, то решение задачи закончено. Иначе, определив среди точек $p^{(j)}$, $j = \overline{3, \nu}$, наиболее удаленную от 0_P в смысле функционала (4.4) и заменив ее на найденную в п.4 точку $\tilde{p} = p(\tilde{w}, \tau_{k+1})$, переходим к п.1 алгоритма.

Для последовательностей $\{u_k\}$, $\{\tau_k\}$, построенных согласно приведенного алгоритма, справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Если* $\tau_k \le T$, *то решение задачи* 4 *существует и*

а) $\lim\limits_{k \to \infty} \tau_k = \tau^0$,

б) *по любым* ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ *можно указать номер* $k(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *такой, что при* $k > k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \qquad \|x(u_k, \tau_k)\|_{R^N} < \varepsilon_1$,

$\sum\limits_{i=1}^{s} \int\limits_0^{\tau_0} \big(\max\{F_i(x(u_k, t), u_k, t), 0\}\big)^2 dt < \varepsilon_2$,

в) *предел* $u^0(\tau)$, $\tau \in [0, \tau^0]$ *любой слабо сходящейся в* $L_2[0, \tau^0]$ *подпоследовательности из* $\{u_k(\tau)\}$ *является оптимальным управлением.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1 работы [7].

5. Результаты вычислительного эксперимента

Предложенный подход к решению нелинейных задач теплопроводности с фазовыми ограничениями был апробирован на следующей задаче: нагреть неограниченную пластину из сплава ЖС6У толщиной 2l=0.46$м$ с начальной температурой 20^oC до конечной (постоянной по сечению) температуры 920^oC за минимальное время с учетом ограничений на термонапряжения и температуру поверхности, которая, по условию, не должна была превышать 1100^oC. Материал ЖС6У является хрупким. Температура греющей среды менялась в диапазоне $[800^oC,\ 1600^oC]$. Зависимость предела прочности от температуры задавалась таблично

Температура, ^oC		20	975	1050	1100	1150
Предел прочности,	Сжатие	1500	700	470	310	210
МПа	Растяжение	980	540	370	200	140

и после перехода к безразмерным величинам аппроксимировалась с использованием метода наименьших квадратов нелинейными соотношениями $\sigma_c(\theta) = (-0.023e^{0.003030\theta} + 0.747)$, $\sigma_p(\theta) = (-0.003e^{0.0046\theta} + 0.476)$.

Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры также задавалась таблично

Температура, ^oC	20	200	500	600	700	800	900	1000
$\lambda(T), Bm/(m \cdot ^o C)$	10.05	15.07	18.84	20.51	22.19	24.28	26.38	28.05

и после перехода к безразмерным величинам аппроксимировалась линейной функцией $\lambda(\theta) = 10.68 + 9.74\theta$.

На каждом шаге итерационного процесса линеаризованная задача решалась для N=6. Выбор такой размерности конечномерной системы объясняется тем, что для меньших N медленносходящиеся ряды в термоограничениях не позволяют получить хорошее приближение к точному решению линеаризованной задачи. Так, результаты вычислительного эксперимента, приведенные в [7] для аналогичной линейной задачи ($\lambda(T) = const$) с линейными фазовыми ограничениями, показывают, что при N=3 время быстродействия составляет 3.37 часа, при N=5 — 4.46 часа, а при N=6 — 4.67 часа. При дальнейшем увеличении N рост времени быстродействия несуществен.

Требуемая точность нагрева на k-й итерации считалась достигнутой, если в конечный момент времени τ_k^0 выполнялись неравенства $\dfrac{\|x(u,\tau_k^0)\|}{\|x_0\|} \le \varepsilon$, $\sum\limits_{i=1}^{3} \int\limits_0^{\tau_k^0} \left[\max\{F_i(u,\tau),,0\}\right]^2 dt < 0.1\varepsilon\hat{\sigma}$, где $\varepsilon = 0.02$, $\hat{\sigma} = \frac{\hat{\theta}+\hat{\sigma}_p+\hat{\sigma}_c}{3}$ — среднее значение приведенных величин ($\hat{\theta} \approx 700$, $\hat{\sigma}_p \approx 700$, $\hat{\sigma}_c \approx 1000$). Итерационный процесс завершался, если на очередной итерации выполнялось неравенство $\Delta_k \le 0.01$, где

$$\Delta_k = \frac{\max\limits_{\tau\in[0,\tau_k^0]} \left(\sum\limits_{i=1}^{6} \int\limits_0^1 \left[K_n(l)(x_n^{(k)} - x_n^{(k-1)}) \right]^2 dl \right)}{\max\limits_{\tau\in[0,\tau_k^0]} \left(\sum\limits_{i=1}^{6} \int\limits_0^1 \left[K_n(l) x_n^{(k)} \right]^2 dl \right)},$$

$$K_n(l) = D_n \cos(\mu_{\mathrm{n}} \mathrm{l}).$$

Всего потребовалось 6 итераций, чтобы получить заданную точность. На рис.1 приведены графики зависимостей от времени оптимального управления, температур поверхности и центра после шестой итерации. Время быстродействия составило 3.98 часа, оптимальное управление имеет 135 переключений. На рис.2 и рис.3 приведены соответственно графики зависимости пределов прочности на сжатие и растяжение, а так же сжимающих и растягивающих термонапряжений от времени при оптимальном режиме нагрева. Как видно из рис.2 скорость нагрева ограничивают не только растягивающие, но и сжимающие термонапряжения. Традиционно же активными считались только растягивающие термонапряжения и ограничения на температуру поверхности.

Отметим, что с увеличением номера итерации k величина $\max\limits_{\tau} |\theta_k(r,\tau) - \theta_{k-1}(r,\tau)|$, $\tau \in [0,\tau_k^0]$, убывает, что подтверждает сходимость итерационного процесса по состоянию. При этом время быстродействия τ_k^0 уменьшается с 4.24 часа на первой итерации до 3.98 часа на шестой итерации.

Указатель литературы

1. *Голубъ Н.Н.* Оптимальное управление симметричным нагревом массивных тел при различных фазовых ограничениях // Автоматика и телемеханика, 1967, №4. С. 38-57.

2. *Вигак В.М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. Киев : Наукова Думка, 1988. 313 с.

3. *Морозкин Н.Д.* Оптимальное управление одномерным нагревом с учетом фазовых ограничений // Математическое моделирование, 1996, Т.8, №3. С. 91-110.

4. *Морозкин Н.Д.* О сходимости конечномерных приближений в задаче оптимального одномерного нагрева с учетом фазовых ограничений // Журнал Вычислительной математики и математической физики, 1996, Т.36, №10. С. 10-22.

5. *Голичев И.И.* Решение некоторых задач для параболических уравнений методом последовательных приближений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1989. 172 с.
6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., Наука, 1967. 736 с.
7. *Морозкин Н.Д.* Оптимальное управление процессами нагрева с учетом фазовых ограничений. Уфа, 1997. 114 с.
8. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М., Наука, 1980. 518 с.
9. *Кирин Н.Е.* Последовательные оценки экстремалей управляемых динамических систем. ЛГУ, 1975. 160 с.

В.И. Мысовских

О СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Введение

Компьютерная алгебра - это новое направление, возникшее при взаимодействии ряда математических дисциплин (в первую очередь, алгебры) и информатики. В широком смысле под этим словосочетанием понимаются любые символьные (в отличие от численных) вычисления, выполняемые на компьютере. Основные классы задач подобного сорта перечислены ниже, в разделе о системах компьютерной алгебры. Имеется также узкоспециальное значение термина “компьютерная алгебра”, применяемое к совокупности методов решения нелинейных систем алгебраических уравнений. В настоящей заметке мы употребляем этот термин в широком смысле.

Следует отметить кардинальное различие между символьными вычислениями (т.е. методами и алгоритмами компьютерной алгебры) и численными методами. Вычисления с числами с плавающей точкой реализованы в компьютере на аппаратном уровне и, следовательно, выполняются с очень высокой скоростью. С другой стороны, представление вещественного (и даже рационального) числа, содержащего бесконечное количество цифр после десятичной точки, в виде числа с плавающей точкой, является приближенным. Поэтому главной заботой специалиста по численным методам и пользователя пакета для численных расчетов является контроль за точностью всех промежуточных вычислений, а его основной целью служит достижение заданной точности приближения для конечного результата. Уже вычисления с целыми числами произвольной разрядности не могут быть реализованы на аппаратном уровне и производятся на программном уровне. То же относится и к работе с рациональными числами, составленными из целых большой разрядности, и к полиномам высокой степени, а также ко всем прочим объектам символьных вычислений. Следовательно, такие вычисления производятся с гораздо меньшей скоростью, чем расчеты с числами с плавающей точкой. Однако, поскольку символьные вычисления дают абсолютно точный результат, пользователь не должен заботиться о погрешности. Таким образом, каждый из указанных типов вычислений имеет свои преимущества и недостатки. Вопрос о том, какой из них предпочесть зависит, главным образом, от специфики решаемой задачи. Дополнительную информации о специфике и соотношении численных и символьных методов можно найти в книге [1]. Отметим также, что в последние годы становятся популярными и являются объектом пристального внимания исследователей так называемые гибридные методы, сочетающие методы компьютерной алгебры, численные методы, а также методы интервального анализа.

2. Классификация систем и типы задач

За два последних десятилетия было создано огромное число систем компьютерной алгебры, большинство из которых широко применяется в научных вычислениях, при решении прикладных проблем, в индустрии. В зависимости от набора стандартных задач, которые могут быть решены при помощи данных систем, последние подразделяются на универсальные (или, иначе, системы общего назначения) и специализированные. Перечислим наиболее значимые типы задач, решаемые при помощи универсальных систем.

1. Всевозможные символьные вычисления с целыми числами произвольной длины, с рациональными числами без ограничения разрядности их числителя и знаменателя, с элементами конечных полей, с полями алгебраических чисел (т.е. с конечными расширениями поля Q при помощи комплексных корней n-й степени из 1) и их кольцами целых.

2. Целый ряд задач по вычислениям с полиномами от нескольких переменных над указанными в предыдущем пункте полями и кольцами (нахождение наибольшего общего делителя, точного значения корней многочленов в радикалах, разложение на множители, вычисление дискриминантов и результантов, базисов Грёбнера [4, 5] и т.п.). Решение систем полиномиальных уравнений и других

систем нелинейных уравнений, сводящихся к ним подстановками элементарных функций.

3. Символьные вычисления с полиномами над областью выражений. В частности, вычисления с многочленами, коэффициенты которых содержат произвольное число параметров.

4. Символьное вычисление пределов от функций, содержащих параметры.

5. Символьное дифференцирование, т.е. нахождение производных по стандартным правилам, изучаемым в высших учебных заведениях. Подчеркнем, что эти методы совершенно отличны от способов численного дифференцирования, известных в вычислительной математике.

6. Символьное интегрирование, т.е. вычисление неопределенных интегралов. Отметим коренное отличие соответствующих алгоритмов от численных методов, используемых для нахождения приближенных значений определенных интегралов.

7. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений в символьной форме.

8. Символьное решение уравнений математической физики и систем уравнений в частных производных.

9. В большинстве универсальных систем компьютерной алгебры имеются средства для изображения 2-мерной и 3-мерной графики. Таким образом, пользователь имеет возможность строить графики кривых и поверхностей, заданных параметрически. Как правило, можно управлять цветом, масштабом, разрешением и точкой наблюдения; окружать график осями, кубом и т. п.

В качестве примера упомянем несколько наиболее известных универсальных систем компьютерной алгебры: Maple, Mathematica, MuPAD, Axiom, Reduce, Derive, Macsyma, Maxima. К сожалению пользователя большинство этих систем было разработано на коммерческой основе, поэтому их лицензионные версии продаются и стоят значительных денег. Приятное исключение составляет созданная в университете города Paderborn (Germany) система компьютерной алгебры MuPAD (Multi Processing Algebra Data Tool) [6]. Отметим также свободно распространяемую (на общих принципах лицензии GNU) универсальную систему Maxima, разработанную в техасском университете (Austin) У.Ф.Шелтером.

Из самого названия специализированных систем компьютерной алгебры ясно, что они специализированы на каком-либо типе задач или области. Как правило, такие системы и пакеты создавались группой специалистов-энтузиастов данного профиля на общественных началах в свободное от преподавательской работы время. Поэтому значительная часть таких специализированных систем распространяется разработчиками бесплатно для некоммерческих целей. Приведем несколько примеров таких систем и пакетов. Наиболее интересной и перспективной автору этих строк представляется система компьютерной алгебры GAP (Groups, Algorithms and Programming) [7], созданная в немецком городе Aachen и позже модифицированная в университете шотландского города St. Andrews. Изначально разрабатываемая как система для вычислений в группах, система GAP в настоящее время представляет собой мощный инструмент практически для любых дискретных алгебраических вычислений. В предпоследней версии GAP 3.4.4 имеется 26 подпакетов для эффективных вычислениий с графами; кодами, исправляющими ошибки; матрицами больших размерностей; пространственными кристаллографическими группами и т. п. Последняя модификации GAP 4.2 включает в себя значительно более эффективные алгоритмы, многие из которых по быстродействию превосходят свои аналоги в GAP 3.4.4 в 2-3 раза. Обе версии системы обладают графическими средствами для изображения графов, соответствующих решеткам подгрупп заданной группы или каких-то подграфов данного графа в случае групп большого порядка. Эти возможности доступны лишь при использовании операционной системы UNIX (которая всегда предпочтительна для большинства систем компьютерной алгебры, несмотря на наличие версий для других операционных систем) и оболочки X-Windows. Система GAP распространяется свободно для некоммерческих целей. Примеры использования GAP для решения сложных научных проблем можно найти в работах автора [2, 3, 8].

Из других бесплатно распространяемых специализированных систем упомянем разработанную во Франции систему PARI-GP. Она предназначена для вычислений в теории чисел, содержит компактные и эффективные алгоритмы для символьных вычислений с алгебраическими числами, соответствующими кольцами и полиномами над этими кольцами. Система имеет весьма малые размеры, умещается на двух 3.5” дискетах. Несколько систем компьютерной алгебры для вычислений в дискретной математике (с графами, кодами, дизайнами, таблицами меток, полиномами Шуберта и т.п.)

было создано на кафедре Lehrstuhl 2 für Mathematik в университете немецкого города Bayreuth. Среди них бесплатно распространяемые пакеты Discreta, Symmetrica, а также используемая в химической промышленности система MOLGEN для перечесления всех изомеров органических соединений заданной структуры. Отметим также, что имеется огромное число систем компьютерной алгебры для вычисления в таких областях науки, как механика, астрономия, различные разделы физики и так далее. Мы не будем перечислять здесь названия и описывать возможности всех этих систем, а укажем для заинтересованного читателя адрес сайта в Internet, где он сможет найти подробную информацию о системах компьютерной алгебры и другом математическом программном обеспечении. Страничка под названием 'Mathematics Software' доступна через EMIS (Europe Mathematics Information Service) по адресу:
`http://www.ras.ru/EMIS/PSU-mirror/MathLists/Software.html`

3. Принципы построения и архитектура

Теперь отметим ряд общих характеристик систем компьютерной алгебры. Большинство из них построено с использованием некоторых общих принципов в архитектуре. В первую очередь следует отметить, что большинство систем компьютерной алгебры изначально разрабатывалось для операционных систем типа UNIX, поэтому даже при наличии соответствующих модификаций для MS-DOS и Windows они наиболее эффективно работают в среде UNIX. Большая часть продвинутых (т.е. аккурано спроектированных и достаточно мощных) систем имеет ядро, которое выполняет ряд ключевых функций. К последним относятся: автоматическое динамическое распределение памяти, ключевые операции с основными простыми и составными (обычно списки и записи) типами данных. Кроме того, большинство подобных систем имеет свой собственный язык программирования, обычно паскалевского типа, но, как правило, не требующий описания типов и объектов. Одной из важнейших функций ядра является интерпретация программ написанных на языке системы. В дополнение к этому ядро содержит набор программных средств для тестирования, обнаружения синтаксических ошибок и т.п. В большинстве продвинутых систем компьютерной алгебры ядро написано на языке C, откуда и вытекает их наибольшая эффективность в среде UNIX.

Кроме ядра, хорошо разработанные системы компьютерной алгебры содержат библиотеки различных уровней. В первую очередь, это библиотеки функций и процедур, а также обширные библиотеки данных. Более того, известные продвинутые системы включают, как правило, различные подпакеты для эффективного решения каких-либо специальных задач. Подобная особенность объясняется тем, что в настоящее время для выполнения одного и того же типа символьных вычислений имеется несколько (порой даже несколько десятков) алгоритмов. Выбор того или иного алгоритма определяется ключевыми особенностями решаемой в данный момент задачм - например, степенью многочлена и числом его ненулевых коэффициентов; размерностью системы или матрицы и т.п. В ряде продвинутых систем, точнее в вышедших в последние годы их версиях, имеется возможность автоматического выбора алгоритма самой системой в зависимости от начальных данных. Например, такая возможность имеется в последней версии системы GAP 4.2.

Важной особенностью построения современных систем компьютерной алгебры является динамичность записей о каждом объекте. А именно, при выполнении всякого нового вычисления с данным объектом полученный результат фиксируется и хранится во вновь создаваемом поле соответствующей записи. Если пользователь захочет воспроизвести этот результат, то вместо повторного вычисления последний будет просто извлечен из соответствующей записи. Таким образом, за счет некоторого дополнительного расхода памяти экономится время работы процессора. Чем больше вычислений с данным объектом производит пользователь, тем больше компонент приобретает соответствующая запись. Естественно, что эта особенность имеет место только в рамках данного сеанса пользовательской работы с системой. Выход из системы уничтожает данные такого сорта. При решении очень емких задач этой особенностью можно воспользоваться для высвобождения памяти. С другой стороны, во многих системах (например, GAP) имеется возможность удалять целые записи и их отдельные компоненты вручную, не завершая сеанс работы.

К общим принципам построения современных систем для символьных вычислений можно отнести и наличие обширной документации, поставляемой в различных удобных для пользователя форматах. Во-первых, все подобные системы, даже такие небольшие, как система PARI-GP, имеют удобную помощь 'on-line', которая вызывается при помощи набора имени интересующего пользователя ключевого слова. Кроме того, дистрибутив обычно содержит '.html' файлы, удобные для чтения при помощи 'Netscape Navigator', 'Internet Explorer', 'Opera' и т.п. В некоторых системах документация поставляется также в виде '.tex' или '.doc' файлов, позволяющих сформировать и распечатать полное руководство или справочник по системе. Для экономии ресурсов пользователю далеко не всегда имеет смысл распечатывать такое руководство, для большинства целей достаточно использовать помощь 'on-line' непосредственно в процессе работы. Например, предпоследняя версия GAP 3.4.4 содержит руководство (Manual) объемом 1600 страниц в TeX.

Как уже упоминалось во введении, чистые системы компьютерной алгебры выполняют символьные вычисления. Однако в большинстве систем (особенно универсальных) для удобства пользователя реализованы числа с плавающей точкой и имеются функции для численной оценки полученного результата при подстановке значений параметров или при анализе выражений с радикалами. Например, в системе MuPAD для этой цели служит стандартная функция `float`.

Указатель литературы

1. *Акритас А.* Основы компьютерной алгебры с приложениями – М., Мир, 1994. 544 с.
2. *Мысовских В.И.* Метки Бернсайда и решение двух проблем З.И.Боревича о полинормальных подгруппах. – Докл. Акад. наук, т. 367 (№4), 1999. с. 445–446.
3. *Мысовских В.И.* Субнормализаторы и свойства вложения подгрупп конечных групп. – Зап. научн. семин. ПОМИ, 265 (1999). 258–280.
4. *B.Buchberger.* Gröbner Bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory. – CAMP-Publ. Nr 83-290. 1983.
5. *R.Fröberg.* An introduction to Gröbner bases. – John Wiley and Sons, 1997.
6. *B.Fuchssteiner et al.* Multy processing algebra data tool: MuPAD. – Birkhäuser Verlag Basel, 1994.
7. *M.Schönert et al.* GAP – Groups, Algorithms and Programming. – Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, Germany, fifth edition (1995).
8. *M.Vsemirnov, V.Mysovskikh and M.C.Tamburini.* Triangle Groups as Subgroups of Unitary Groups. – J. Algebra **245** (2001), 562–583.

И. В. Олемской

АЛГОРИТМ ВЫДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

1. Введение

Структурный метод интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_k}{dx} = \varphi_k(x, z_1, \ldots, z_m), \quad k = 1, \ldots, m; \tag{1.1}$$

$$x \in [X_0, X_k] \subset R, \ z_k : [X_0, X_k] \longrightarrow R,$$
$$\varphi_k : [X_0, X_k] \times R^m \longrightarrow R,$$

рассматриваемый в работе [1], классифицируется как явный одношаговый типа Рунге- Кутты. Его использование предполагает, что существует преобразование, приводящее систему (1.1) к виду

$$\frac{dy_0}{dx} = f_0(x, y_0, y_1, \ldots, y_n), \tag{1.2}$$

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_0, \ldots, y_{i-1}, y_{l+1}, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, l; \tag{1.3}$$

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_0, \ldots, y_{j-1}), \qquad j = l+1, \ldots, n, \tag{1.4}$$

$$x \in [X_0, X_k] \subset R,$$

$$\begin{aligned}
&y_s : [X_0, X_k] \longrightarrow R^{r_s}, && s = 0, \ldots, n;\\
&f_0 : [X_0, X_k] \times R^m \longrightarrow R^{r_0}, &&\\
&f_i : [X_0, X_k] \times R^{m - \sum_{s=i}^{l} r_s} \longrightarrow R^{r_i}, && i = 1, \ldots, l;\\
&f_j : [X_0, X_k] \times R^{m - \sum_{s=j}^{n} r_s} \longrightarrow R^{r_j}, && j = l+1, \ldots, n;\\
&\textstyle\sum_{s=0}^{n} r_s = m.
\end{aligned}$$

Система (1.2)-(1.4) состоит в общем случае из трех групп уравнений. Группы (1.3) и (1.4) будем в дальнейшем называть *циклическими.* Каждое уравнение циклической группы занимает вполне определенное место в последовательности уравнений своей группы. Его правая часть не зависит от искомых функций, поведение которых описывается этим и всеми последующими уравнениями этой же группы. Группу уравнений (1.2) будем в дальнейшем называть *общей.* Как следует из [1], эффективность от применения структурного метода к системе (1.2)-(1.4) (в предположении равноправности φ_i, $i = 1, \ldots, m$,) тем выше, чем меньше $r_0/(m - r_0)$.

2. Постановка задачи

В качестве преобразования, приводящего систему (1.1) к виду (1.2)-(1.4), выбираем перестановку (переобозначение) уравнений системы (1.1).

Задача состоит в том, чтобы указать такой порядок следования уравнений и нумерации переменных исходной системы (1.1), при котором для преобразованной системы

$$\frac{d\pi z}{dx} = \pi\varphi(x, \pi z) \tag{2.1}$$

количество уравнений, входящих в *общую* группу, было минимально, или что тоже самое, сумма уравнений, входящих в *циклические* группы, - максимальна.

Здесь $\pi z = \left(z_{\pi(1)}, z_{\pi(2)}, \ldots, z_{\pi(m)}\right)^T$, $\pi\varphi = \left(\varphi_{\pi(1)}, \varphi_{\pi(2)}, \ldots, \varphi_{\pi(m)}\right)^T$, $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(m))$ – перестановка элементов множества $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, определяющая порядок следования уравнений системы (1.1). Например, $\pi(i) = j$ – означает, что j – ое уравнение системы (1.1) будет занимать i - ое место в системе (2.1).

2.1. Основные понятия.

О п р е д е л е н и е 2.1. Матрицу $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m}$ будем называть *структурной матрицей* системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) и обозначать $A(\varphi)$, если её элементы

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad \varphi_i \ \textit{не зависит от} \ z_j, \\ 1, & \textit{если} \quad \varphi_i \ \textit{зависит от} \ z_j. \end{cases}$$

Так структурная матрица системы (1.2) - (1.4) имеет вид:

$$
A(f) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
* & * & \cdots & * & * & * & * \\ \hline
* & \mathbf{O}_{r_1\times r_1} & \cdots & \mathbf{O}_{r_1\times r_l} & * & * & * \\ \hline
\cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline
* & * & * & \mathbf{O}_{r_l\times r_l} & * & * & * \\ \hline
* & * & * & * & \mathbf{O}_{r_{l+1}\times r_{l+1}} & \cdots & \mathbf{O}_{r_{l+1}\times r_n} \\ \hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \hline
* & * & * & * & * & * & \mathbf{O}_{r_n\times r_n}
\end{array}\right).
$$

Здесь и в дальнейшем $\mathbf{O}_{r_i\times r_j}$ – блочная матрица размерности $r_i \times r_j$, все элементы которой равны нулю.'*'- означает, что данные элементы структурной матрицы – произвольны.

О п р е д е л е н и е 2.2. Множество, элементами которого являются номера компонент искомой вектор-функции $z = \{z_1, \ \ldots,$ $\ldots, \ z_m\}$, от которых не зависит правая часть $i-$ ого уравнения СОДУ (1.1), будем называть i-ым *горизонтальным* структурным множеством СОДУ (1.1) и обозначать $E_i(\varphi)$, т.е.

$$E_i(\varphi) = \{j \in I_m \, : \, a_{ij} = 0, \, A(\varphi) = \big\{a_{\nu\mu}\big\}_{\nu,\mu=1}^{m}\}.$$

О п р е д е л е н и е 2.3. Множество, элементами которого являются номера уравнений СОДУ (1.1), правые части которых не зависят от $j-$ой компоненты вектор-функции $z = \{z_1, \ldots, z_m\}$, будем называть $j-$ым *вертикальным* структурным множеством СОДУ (1.1) и обозначать $H_j(\varphi)$:

$$H_j(\varphi) = \{i \in I_m \, : \, a_{ij} = 0, \, A(\varphi) = \big\{a_{\nu\mu}\big\}_{\nu,\mu=1}^{m}\}.$$

Введем в рассмотрение

$$\delta(r,k) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i, \ \ \delta(r,0) = 0, \ \ \delta(r, n+1) = m.$$

О п р е д е л е н и е 2.4. Будем говорить, что СОДУ (1.1) имеет циклическую структуру с параметрами $l \in \{0\} \cup N$, $n \in N$, $l < n$, $r = (r_0, r_1, \ldots, r_n) \in \big(\{0\} \cup N\big) \times N^n$, $\delta(r, n+1) = m$ и обозначать $CS_{\varphi}^{m}[l, n, r]$, если для горизонтальных множеств справедливы включения:

$$
\begin{aligned}
&\{\delta(r,i)+1,\dots,\delta(r,l+1)\} \subset E_{\delta(r,i)+\mu(i)}(\varphi)\,;\\
&\qquad\qquad i=1,\dots,l\,;\; n>l>0\,,\\
&\{\delta(r,j)+1,\dots,\delta(r,n+1)\} \subset E_{\delta(r,j)+\mu(j)}(\varphi)\,;\\
&\qquad\qquad i=l+1,\dots,n\,;\; n>l\ge 0\,,
\end{aligned}
$$

где $\mu(s)=1,\dots,r_s$; $s=1,\dots,n$.

Можно ввести это же понятие, используя определение структурной матрицы.

О п р е д е л е н и е 2.5. Будем говорить, что СОДУ (1.1) имеет циклическую структуру с параметрами $l \in \{0\}\cup N$, $n\in N$, $l<n$, $r=(r_0,r_1,\dots,r_n)\in \big(\{0\}\cup N\big)\times N^n$, $\delta(r,n+1)=m$ и обозначать $CS^m_\varphi[l,n,r]$, если для элементов структурной матрицы $A(\varphi)$, СОДУ (1.1) справедливы равенства

$$a_{\xi(s)\nu(s)}=0,\quad s=1,\dots,n,$$

где

$$
\begin{aligned}
\xi(s)= &\quad \delta(r,s)+1,\dots,\delta(r,s+1);\\
\nu(s)= &\quad \begin{cases} \delta(r,s)+1,\dots,\delta(r,l+1); & \text{если}\quad 0<l<n\quad s\le l,\\ \delta(r,s)+1,\dots,\delta(r,n+1); & \text{если}\quad 0\le l<n\quad s>l.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Так СОДУ (1.2)-(1.4) имеет циклическую структуру $CS^m_f[l,n,r]$.

Структурная матрица СОДУ (1.2)-(1.4) с циклической структурой $CS^m_f[0,n,r]$, $n\in N$ имеет вид:

$$
A(f)=\left(\begin{array}{c|c|c|c}
* & * & \cdots & * \\ \hline
* & \mathbf{O}_{r_1\times r_1} & \cdots & \mathbf{O}_{r_1\times r_n} \\ \hline
\cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \hline
* & * & * & \mathbf{O}_{r_n\times r_n}
\end{array}\right).
$$

Лемма 2.1. *Элемент $j\in E_i(\pi\varphi)$, $\big(i\in H_j(\pi\varphi)\big)$, тогда и только тогда, когда $\pi(j)\in E_{\pi(i)}(\varphi)$, $\big(\pi(i)\in H_{\pi(j)}(\varphi)\big)$, для $\pi\in P$; $i,j\in I_m$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Элементы структурных матриц СОДУ (1.1) $A(\varphi)=\{a_{\nu\mu}\}^m_{\nu,\mu=1}$ и СОДУ (2.1) $A(\pi\varphi)=\{b_{\nu\mu}\}^m_{\nu,\mu=1}$ связаны отношением

$$b_{\nu\mu}=a_{\pi(\nu)\pi(\mu)}. \tag{2.2}$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $j\in E_i(\pi\varphi)$, $\big(i\in H_j(\pi\varphi)\big)$. Согласно определению структурных множеств, $b_{ij}=0$. Значит, в силу равенства (2.2), $a_{\pi(i)\pi(j)}=0$, и справедливо включение: $\pi(j)\in E_{\pi(i)}(\varphi)$, $\big(\pi(i)\in H_{\pi(j)}(\varphi)\big)$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\pi(j) \in E_{\pi(i)}(\varphi)$, $\big(\pi(i) \in H_{\pi(j)}(\varphi)\big)$, следовательно, $a_{\pi(i)\pi(j)} = 0$, и соотношение (2.2) обеспечивает равенство $b_{ij} = 0$. Таким образом, для структурных множеств СОДУ (2.1) справедливы включения: $j \in E_i(\pi\varphi)$, $(i \in H_j(\pi\varphi))$.

О п р е д е л е н и е 2.6. Будем говорить, что циклическая структура $CS^m_\varphi[l,n,r]$ СОДУ (1.1) – *предельная* и обозначать $\overline{CS^m_\varphi}[l,n,r]$, если справедливы невключения:

$$\big\{\delta(r,1),\ldots,\delta(r,l+1)\big\} \not\subset E_{\delta(r,1)}(\varphi)\,;\; l>0, \qquad \text{и}$$
$$\big\{\delta(r,l+1),\ldots,\delta(r,n+1)\big\} \not\subset E_{\delta(r,l+1)}(\varphi)\,;\; l \geq 0.$$

О п р е д е л е н и е 2.7. Под *длиной циклической структуры* $\overline{CS}^m_\varphi[l,n,r]$ СОДУ (1.1) будем понимать величину $\sum_{\nu=1}^n r_\nu\kappa_\nu$, и обозначать ее $|\overline{CS}^m_\varphi[l,n,r]|$.
Здесь κ_ν-весовые коэффициенты. В дальнейшем, в силу равноправности правых частей, $\kappa_\nu = 1$.

Пусть $P = \{\pi\}$– множество всех перестановок из m элементов $I_m = \{1,2,\ldots,m\}$.

Задача 1. Найти перестановку $\pi^* \in P$ такую, для которой справедливо неравенство

$$|\overline{CS}^m_{\pi^*\varphi}[0,n,r]| \geq |\overline{CS}^m_{\pi\varphi}[0,\hat{n},\hat{r}]| \;\;, \forall\pi \in P.$$

Задача 2. Найти перестановку $\pi^* \in P$ такую, для которой справедливо неравенство

$$|\overline{CS}^m_{\pi^*\varphi}[l,n,r]| \geq |\overline{CS}^m_{\pi\varphi}[\hat{l},\hat{n},\hat{r}]| \;\;, \forall\pi \in P.$$

О п р е д е л е н и е 2.8. Множество $B \subset I_m$, для разбиения которого

$$B = \bigcup_{\nu=1}^d \omega_\nu, \quad \omega_\mu \cap \omega_\nu = \emptyset,\; \mu \neq \nu, \quad \text{справедливы включения}$$

$$\bigcup_{\nu=j}^d \omega_\nu \subset E_k, \quad \forall k \in \omega_j;\; j = 1,\ldots,d,$$

будем называть *элементным основанием циклической структуры* СОДУ (1.1) и обозначать $B_\varphi(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_d)$.

Лемма 2.2. *Для того, чтобы множество* W *было подмножеством* j*-го горизонтального структурного множества* СОДУ (1.1), $(\forall j \in V)$, *необходимо и достаточно, чтобы множество* V *было подмножеством* k*-го вертикального структурного множества* СОДУ (1.1) $(\forall k \in W)$: *для любого* k *из множества* W :

$$W \subset E_j(\varphi), \quad \forall j \in V \Leftrightarrow V \subset H_k(\varphi), \quad \forall k \in W; \quad V, W \subset I_m. \quad (2.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $W \subset E_j(\varphi)$, $\forall j \in V$, и значит $k \in E_j(\varphi)$, $\forall j \in V$; $\forall k \in W$ и, в силу *определения 2.2,* элемент a_{jk} структурной матрицы $A(\varphi)$ СОДУ (1.1) равен нулю. А это значит, в соответствии с *определением 2.3,* что $j \in H_k(\varphi)$, $\forall j \in V$; $\forall k \in W$.
Таким образом, множество $V \subset H_k(\varphi)$, $\forall k \in W$.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $V \subset H_k(\varphi)$; $\forall k \in W$, т.е. $\forall j \in V$, $j \in H_k(\varphi)$ при $\forall k \in W$ и, в силу *определения 2.3,* элемент структурной матрицы $A(\varphi)$ СОДУ (1.1) $a_{jk} = 0$. Но, в соответствии с *определением 2.2,* это значит, что $k \in E_j(\varphi)$, $\forall j \in V$ и $\forall k \in W$. Отсюда и следует, что $W \subset E_j(\varphi)$ для $\forall j \in V$.

Лемма 2.3. *Объединение* $d + 1 - j$ *множеств* ω_j, ω_{j+1}, ..., ω_d *является подмножеством* i − *го горизонтального структурного множества* СОДУ (1.1) *для любого* i *из множества* ω_j *тогда и только тогда, когда объединение* j *множеств* ω_1, ω_2, ..., ω_j *является подмножеством* i − *го вертикального структурного множества* СОДУ (1.1) *для любого* i *из множества* ω_j :

$$\bigcup_{\nu=j}^{d} \omega_\nu \subset E_i(\varphi) \Leftrightarrow \bigcup_{\nu=1}^{j} \omega_\nu \subset H_i(\varphi), \forall i \in \omega_j; \ j = 1, \ldots, d. \qquad (2.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть

$$\bigcup_{\nu=j}^{d} \omega_\nu \subset E_i(\varphi); \quad \forall i \in \omega_j; \quad j = 1, \ldots, d,$$

отсюда следует

$$\omega_j \subset E_i(\varphi), \omega_{j+1} \subset E_i(\varphi), \ldots, \omega_d \subset E_i(\varphi); \quad j = 1, \ldots, d; \quad \forall i \in \omega_j$$

и в соответствии с *леммой 2.2*

$$\left\{ \omega_j \subset H_i(\varphi); \, \forall i \in \omega_j \right\}_{j=1}^{d}.$$

Но это значит, что

$$\bigcup_{\nu=1}^{d} \omega_\nu \subset H_i(\varphi); \quad \forall i \in \omega_j; \quad j = 1, \ldots, d.$$

Что и требовалось доказать.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть

$$\bigcup_{\nu=1}^{j} \omega_\nu \subset H_i(\varphi); \quad \forall i \in \omega_j; \quad j = 1, \ldots, d,$$

отсюда следует

$$\omega_1 \subset H_i(\varphi), \omega_2 \subset H_i(\varphi), \ldots, \omega_j \subset H_i(\varphi); \quad \forall i \in \omega_j; \quad j = 1, \ldots, d.$$

Используя утверждение *леммы 2.2,* выпишем включения

$$\omega_j \subset E_i(\varphi); \forall i \in \omega_1; \;\; \omega_j \subset E_i(\varphi); \forall i \in \omega_2; \;\; \ldots; \omega_j \subset E_i(\varphi);$$

$$\forall i \in \omega_j; \quad j = 1, \ldots, d.$$

Но это значит, что верно :

$$\bigcup_{\nu=j}^{d} \omega_\nu \subset E_i(\varphi); \quad \forall i \in \omega_j; \quad j = 1, \ldots, d.$$

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим множество $W \subset I_m$. Перенумеруем элементы этого множества с использованием чисел натурального ряда $W = \{i_1, i_2, \ldots, i_q\}, \quad q = |W|$. Введем в рассмотрение

$$\beta(r, s) = \sum_{i=1}^{s} r_i, \;\; \beta(r, 0) = 0, \;\; \beta(r, d) = |W|; \quad r = (r_1, r_2, \ldots, r_d) \in N^d.$$

Теорема 2.1. *Для того чтобы множество* $W = \{i_1, i_2, \ldots, i_q\}$ *было элементным основанием циклической структуры* СОДУ (1.1) – $W_\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_d)$, $|\omega_s| = r_s$; $s = 1, \ldots, d$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\{i_p, i_{p+1}, \ldots, i_{\beta(r,d)+1-p}\} \subset E_{i_p}(\varphi) \bigcap H_{i_{\beta(r,d)+1-p}}(\varphi); \tag{2.5}$$

$$p = 1, \dots, \beta(r,d) - \left[\frac{\beta(r,d)}{2}\right],$$

и

$$\{i_{\beta(r,s-1)+1}, i_{\beta(r,s-1)+2}, \dots, i_{\beta(r,s-1)+k}\} \subset E_{i_{\beta(r,s-1)+k}}(\varphi), \tag{2.6}$$

$$k = 1, \dots, r_s, \ s = 1, \dots, d.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $W = \{i_1, i_2, \dots, i_{\beta(r,d)}\}$ - элементное основание циклической структуры. Значит, справедливы включения:

$$\bigcup_{j=s}^{d} \omega_j \subset E_k(\varphi), \, \forall k \in \omega_s, \tag{2.7}$$

$$\omega_s = \{i_{\beta(r,s-1)+1}, i_{\beta(r,s-1)+2}, \dots, i_{\beta(r,s)}\}; \quad s = 1, \dots, d,$$

которые можно представить следующим образом:

$\{i_{\beta(r,s-1)+1}, i_{\beta(r,s-1)+2}, \dots, i_{\beta(r,d)}\} \subset E_{i_{\beta(r,s-1)+k}}(\varphi),$
$k = 1, \dots, r_s, \quad s = 1, \dots, d.$

Разобъем это включение на два

$$\{i_{\beta(r,s-1)+k}, i_{\beta(r,s-1)+2}, \dots, i_{\beta(r,d)}\} \subset E_{i_{\beta(r,s-1)+k}}(\varphi), \tag{2.8}$$

$$\{i_{\beta(r,s-1)+1}, i_{\beta(r,s-1)+2}, \dots, i_{\beta(r,s-1)+k}\} \subset E_{i_{\beta(r,s-1)+k}}(\varphi), \tag{2.9}$$

$$k = 1, \dots, r_s, \ s = 1, \dots, d.$$

Воспользовавшись утверждением *леммы 2.3,* перепишем (2.7) в виде:

$$\bigcup_{j=1}^{d+1-s} \omega_j \subset H_k(\varphi); \, \forall k \in \omega_{d+1-s}, \quad s = 1, \dots, d. \tag{2.10}$$

Но отсюда следует, что

$$\{i_1, i_2, \dots, i_{\beta(r,d+1-s)}\} \subset H_{i_{\beta(r,d+1-s)+1-k}}(\varphi), \tag{2.11}$$

$$k = 1, \dots, r_{d+1-s}; \, s = 1, \dots, d.$$

Включение (2.11) представимо в виде совокупности двух включений:

$$\{i_1, \dots, i_{\beta(r,d+1-s)+1-k}\} \subset H_{i_{\beta(r,d+1-s)+1-k}}(\varphi), \tag{2.12}$$

$$\{i_{\beta(r,d+1-s)+1-k},\dots,i_{\beta(r,d+1-s)}\}\subset H_{i_{\beta(r,d+1-s)+1-k}}(\varphi), \tag{2.13}$$

$$k=1,\dots,r_{d+1-s},\ s=1,\dots,d.$$

Включения (2.8) и (2.12) запишем в виде:

$$\{i_k,\dots,i_{\beta(r,d)}\}\subset E_{i_k}(\varphi), \tag{2.14}$$

и

$$\{i_1,\dots,i_{\beta(r,d)+1-k}\}\subset H_{i_{\beta(r,d)+1-k}}(\varphi), \quad k=1,\dots,\beta(r,d) \tag{2.15}$$

соответственно. Отсюда следует, что

$\{i_k,i_{k+1},\dots,i_{\beta(r,d)+1-k}\}\subset E_{i_k}(\varphi)\bigcap H_{i_{\beta(r,d)+1-k}}(\varphi);$

$k=1,\dots,\beta(r,d)-\left[\frac{\beta(r,d)}{2}\right].$

Достаточность. Пусть для элементов множества $W=\{i_1,i_2,\dots,i_{\beta(r,d)}\}$ справедливы включения (2.5) и (2.6). Значит, справедливы соотношения:

$$\{i_p,\dots,i_{\beta(r,d)+1-p}\}\subset E_{i_p}(\varphi), \tag{2.16}$$

и

$$\{i_p,\dots,i_{\beta(r,d)+1-p}\}\subset H_{i_{\beta(r,d)+1-p}}(\varphi), \quad p=1,\dots,\beta(r,d)-\left[\frac{\beta(r,d)}{2}\right]. \tag{2.17}$$

Тогда, согласно *лемме 2.2,* при некотором p из (2.17) следует, что

$$i_{\beta(r,d)+1-p}\subset E_{i_k}(\varphi), \quad k=p,p+1,\dots,\beta(r,d)+1-p; \tag{2.18}$$

$$p=1,\dots,\beta(r,d)-\left[\frac{\beta(r,d)}{2}\right].$$

И из соотношений (2.18) следует справедливость включений

$$\{i_{\beta(r,d)+1-p},\dots,i_{\beta(r,d)}\}\subset E_{i_p}(\varphi); \quad p=1,\dots,\beta(r,d)-\left[\frac{\beta(r,d)}{2}\right], \tag{2.19}$$

и

$$\{i_k,\dots,i_{\beta(r,d)}\}\subset E_{i_k}(\varphi); \quad k=\left[\frac{\beta(r,d)}{2}\right]+1,\dots,\beta(r,d). \tag{2.20}$$

Для наглядности перепишем (2.20) в виде:
$\{i_{\beta(r,s-1)+k}, i_{\beta(r,s-1)+k+1}, \ldots, i_{\beta(r,d)}\} \subset E_{i_{\beta(r,s-1)+k}}(\varphi);$
$k = 1, \ldots, r_s; \quad s = 1, \ldots, d,$
и с учетом второго условия *теоремы 2.1,* верно включение:

$$\{i_{\beta(r,s-1)+1}, i_{\beta(r,s-1)+2}, \ldots, i_{\beta(r,d)}\} \subset E_{i_{\beta(r,s-1)+k}}(\varphi); \qquad (2.21)$$

$$k = 1, \ldots, r_s; \quad s = 1, \ldots, d.$$

Затем, если положить

$$\omega_s = \{i_{\beta(r,s-1)+1}, i_{\beta(r,s-1)+2}, \ldots, i_{\beta(r,s)}\},$$

то (2.21) примет вид:

$$\bigcup_{j=s}^{d} \subset E_i(\varphi), \quad \forall i \in \omega_s; \quad s = 1, \ldots, d; \quad \omega_k \cap \omega_p = \emptyset, \quad k \neq p.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы на множестве перестановок $P = \{\pi\}$ существовала такая $\pi^* \in P$, что* СОДУ (2.1) *имела циклическую структуру $CS^m_{\pi^*\varphi}[0, n, r]$, необходимо и достаточно, чтобы существовало элементное основание циклической структуры*

$$W_\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_n), \quad |\omega_s| = r_s;$$

$$s = 0, \ldots, d; \quad \omega_0 = I_m \backslash W_\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_n).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть на $\pi^* \in P$ СОДУ (2.1) имеет циклическую структуру $CS^m_{\pi^*\varphi}[0, n, r]$. Тогда, в силу *определения 2.4,* справедливы включения

$$\{\delta(r, i) + 1, \delta(r, i) + 2, \ldots, \delta(r, n + 1)\} \subset E_{p(i)}(\pi^*\varphi); \qquad (2.22)$$

для $i = 1, \ldots, n; \quad \delta(r, i) < p(i) \leq \delta(r, i + 1)$. Но по *лемме 2.1* включению (2.22) эквивалентно следующее

$$\{\pi^*(\delta(r, i)+1), \pi^*(\delta(r, i)+2), \ldots, \pi^*(\delta(r, n+1)\} \subset E_{\pi^*(p(i))}(\varphi); \qquad (2.23)$$

где $\delta(r, i) < p(i) \leq \delta(r, i + 1); \quad i = 1, \ldots, n.$
Обозначим через ω_s множество, элементами которого являются элементы перестановки $\pi^*(\delta(r, s) + 1), \pi^*(\delta(r, i) + 2), \ldots, \pi^*(\delta(r, s + 1)),$ т.е.

$\omega_s = \{\pi^*(\delta(r,s)+1), \pi^*(\delta(r,s)+2), \ldots, \pi^*(\delta(r,s+1))\}$;
$s = 0, \ldots, n$.

Значит, по построению

$\omega_p \cap \omega_k = \emptyset; \quad p \neq k; \quad |\omega_s| = r_s; \quad s = 0, \ldots, n.$

Используя введенные множества ω_s, включение (2.23) можно записать в виде:

$\bigcup_{p=i}^n \omega_p \subset E_k(\varphi), \quad \forall k \in \omega_i; \quad i = 1, \ldots, n.$

Что и доказывает необходимость, так как множество $W = \cup_{p=1}^n \omega_p$ является элементным основанием циклической структуры, т.е. $W_\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

Достаточность. Пусть множество $W_\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $|\omega_s| = r_s; \ s = 0, \ldots, n-$ элементное основание циклической структуры. Перенумеруем элементы множеств $\omega_s = \{p_{\delta(r,s)+1}, \ldots, \ldots, p_{\delta(r,s+1)}\}$, $s = 1, \ldots, n$, и элементы множества $\omega_0 = I_m \backslash W_\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \{p_1, \ldots, p_{r_0}\}$, где $r_0 = |I_m \backslash W_\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_n)|$. Построим перестановку π^* по правилу $\pi^*(k) = p_k; \quad k = 1, \ldots, m$. Тогда включение $\bigcup_{s=i}^n \omega_s \subset E_k(\varphi), \quad \forall k \in \omega_i; \quad i = 1, \ldots, n$ можно записать в виде

$$\bigcup_{s=i}^{n} \{\pi^*(\delta(r,s)+1), \pi^*(\delta(r,s)+2), \ldots, \pi^*(\delta(r,s+1))\} = \tag{2.24}$$

$$= \{\pi^*(\delta(r,i)+1), \pi^*(\delta(r,i)+2), \ldots, \pi^*(\delta(r,n+1))\} \subset E_{\pi^*(p(i))}(\varphi);$$

где $\delta(r,i) < p(i) \leq \delta(r,i+1); \quad i = 1, \ldots, n$. Но в силу *леммы 2.1* включение (2.24) эквивалентно следующему:

$$\{\delta(r,i)+1, \delta(r,i)+2, \ldots, \delta(r,n+1)\} \subset E_{p(i)}(\pi^*\varphi); \tag{2.25}$$

для $\delta(r,i) < p(i) \leq \delta(r,i+1); \quad i = 1, \ldots, n$. И согласно *определению 2.4* из (2.25) следует, что СОДУ (2.1) на $\pi^* \in P$ имеет циклическую структуру $CS^m_{\pi^*\varphi}[0,n,r]$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.3. *Для того, чтобы на множестве перестановок $P = \{\pi\}$ существовала такая перестановка $\pi^* \in P$, что* СОДУ (2.1) *имела циклическую структуру $CS^m_{\pi^*\varphi}[l,n,r]$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два взаимно непересекающиеся множества*

$$W^1_\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_l), \quad W^2_\varphi(\omega_{l+1}, \ldots, \omega_n),$$

являющиеся элементными основаниями циклической структуры:

$$\omega_0 = I_m \setminus \left[W_\varphi^1(\omega_1, \dots, \omega_l) \cup W_\varphi^2(\omega_{l+1}, \dots, \omega_n)\right];$$

$$|\omega_s| = r_s;\ s = 0, \dots, n.$$

Доказательство этой теоремы повторяет фактически доказательство предыдущей *теоремы 2.2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть на $\pi^* \in P$ СОДУ (2.1) имеет циклическую структуру $CS^m_{\pi^*\varphi}[l, n, r]$. Тогда, в силу *определения 2.4,* справедливы включения

$$\begin{gathered}\{\delta(r,i)+1, \delta(r,i)+2, \dots, \delta(r,l+1)\} \subset E_{p(i)}(\pi^*\varphi);\\ \{\delta(r,j)+1, \delta(r,j)+2, \dots, \delta(r,n+1)\} \subset E_{p(j)}(\pi^*\varphi);\\ \text{при} \quad \delta(r,s) < p(s) \le \delta(r,s+1);\\ i = 1, \dots, l; \quad j = l+1, \dots, n; s = 1, \dots, n.\end{gathered} \tag{2.26}$$

Согласно утверждению *леммы 2.1* включениям (2.26) эквивалентны следующие

$$\begin{gathered}\{\pi^*(\delta(r,i)+1), \pi^*(\delta(r,i)+2), \dots, \pi^*(\delta(r,l+1)\} \subset E_{\pi^*(p(i))}(\varphi);\\ \{\pi^*(\delta(r,j)+1), \pi^*(\delta(r,j)+2), \dots, \pi^*(\delta(r,n+1)\} \subset E_{\pi^*(p(j))}(\varphi);\\ \text{где } \delta(r,s) < p(s) \le \delta(r,s+1);\\ s = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, l; \quad j = l+1, \dots, n.\end{gathered} \tag{2.27}$$

Вводя множества

$\omega_s = \{\pi^*(\delta(r,s)+1), \pi^*(\delta(r,s)+2), \dots, \pi^*(\delta(r,s+1))\};$
$(s = 0, \dots, n)$, производим разбиение множества I_m, причем, по построению этих множеств

$\omega_p \cap \omega_k = \emptyset; \quad p \ne k; \quad |\omega_s| = r_s; \quad s = 0, \dots, n.$
Включения (2.27), записанные с использованием введенных множеств ω_s, имеют вид:

$\bigcup_{p=i}^{l} \omega_p \subset E_k(\varphi), \quad \forall k \in \omega_i; \quad i = 1, \dots, l,$

$\bigcup_{p=j}^{n} \omega_p \subset E_k(\varphi), \quad \forall k \in \omega_j; \quad j = l+1, \dots, n.$

Таким образом, множества $W_\varphi^1 = \bigcup_{p=1}^{l} \omega_p, \qquad W_\varphi^2 = \bigcup_{p=l+1}^{n} \omega_p$, являются элементными основаниями циклической структуры, причем в силу построения их пересечение пусто:

$W^1_\varphi(\omega_1,\dots,\omega_l)\cap W^2_\varphi(\omega_{l+1},\dots,\omega_n)=\emptyset.$
Что и доказывает необходимость.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть имеем взаимно непересекающиеся элементные основания циклической структуры

$$W^1_\varphi(\omega_1,\dots,\omega_l) \text{ и } W^2_\varphi(\omega_{l+1},\dots,\omega_n).$$

Перенумеруем элементы множеств $\omega_s, \quad s=1,\dots,n,$

$$\omega_s=\{p_{\delta(r,s)+1},\dots,p_{\delta(r,s+1)}\},\quad s=1,\dots,n, \tag{2.28}$$

и элементы множества

$$\omega_0=I_m\setminus\left[W^1_\varphi(\omega_1,\dots,\omega_l)\bigcup W^2_\varphi(\omega_{l+1},\dots,\omega_n)\right]=\{p_1,\dots,p_{r_0}\}, \tag{2.29}$$

где $r_0=|\omega_0|$.
Построим перестановку π^* по правилу

$$\pi^*(k)=p_k;\quad k=1,\dots,m. \tag{2.30}$$

И в силу предположений справедливы включения :
$\bigcup_{s=i}^{l}\omega_s\subset E_k(\varphi),\quad \forall k\in\omega_i;\quad i=1,\dots,l;$
$\bigcup_{s=j}^{n}\omega_s\subset E_k(\varphi),\quad \forall k\in\omega_j;\quad j=l+1,\dots,n,$
а с учетом (2.28)-(2.30) они примут вид:
$\{\pi^*(\delta(r,i)+1),\pi^*(\delta(r,i)+2),\dots,\pi^*(\delta(r,l+1))\}\subset E_{\pi^*(p(i))}(\varphi),$
$\{\pi^*(\delta(r,j)+1),\pi^*(\delta(r,j)+2),\dots,\pi^*(\delta(r,n+1))\}\subset E_{\pi^*(p(j))}(\varphi),$
где $\delta(r,s)<p(s)\le\delta(r,s+1);\quad s=1,\dots,n.$

В силу *леммы 2.1* этим включениям эквивалентны следующие:
$\{\delta(r,i)+1,\delta(r,i)+2,\dots,\delta(r,l+1)\}\subset E_{p(i)}(\pi^*\varphi);$
$i=1,\dots,l;$
$\{\delta(r,j)+1,\delta(r,j)+2,\dots,\delta(r,n+1)\}\subset E_{p(j)}(\pi^*\varphi);$
$j=l+1,\dots,n;$
для $\delta(r,s)<p(s)\le\delta(r,s+1);\quad s=1,\dots,n$. А это по *определению 2.4* и означает, что СОДУ (1.2) на $\pi^*\in P$ имеет циклическую структуру $CS^m_{\pi^*\varphi}[l,n,r]$. Что и требовалось доказать.

Доказательство *теорем 2.1, 2.2, 2.3* конструктивно. Так опираясь на доказательство *теоремы 2.1,* можно на множестве $G\subset I_m$ выделить множество, являющееся элементным основанием циклической структуры, а *теоремы 2.2, 2.3* устанавливают связь между множествами, являющимися элементными основаниями циклической структуры и перестановками, на которых СОДУ (2.1) имеет циклическую структуру.

3. Алгоритм решением задачи 1

1. Строим множество $\Omega^{(0)} = \{i \in I_m : i \in E_i(\varphi)\}$, полагая значение номера шага алгоритма $\nu = 0$.

Если множество $\Omega^{(0)} = 0$, то на множестве I_m не существует множества, являющегося элементным основанием циклической структуры.

2. Строим множества $D_{(i,j)}$, $i \in \Omega^{(0)}$; $j \in \Omega^{(0)}$; $i \neq j$, являющегося пересечением $i-$го горизонтального структурного множества $E_i(\varphi)$ и $j-$го вертикального структурного множества $H_j(\varphi)$:

$$D_{(i,j)}(\varphi) = E_i(\varphi) \cap H_j(\varphi) \cap \Omega^{(0)}.$$

3. Строим множество возможных продолжений $S^{(\nu)}$ на $\nu-$ом шаге алгоритма при выбранных элементах: $\alpha^{(0)}$, $\alpha^{(1)}$, $\ldots$, $\alpha^{(\nu-1)}$, называемых в дальнейшем *узловыми.*

$$S^{(\nu)} = \{(i,j) \in \Omega^{(\nu)} \times \Omega^{(\nu)}, i \neq j : \{i,j\} \subset D_{(i,j)}\}.$$

4. Рассмотрим два случая: $S^{(\nu)} = \emptyset$ и $S^{(\nu)} \neq \emptyset$.

- Если $S^{(\nu)} = \emptyset$, то процесс построения упорядоченного множества $W = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ закончен. В этом случае $k = 2\nu + 1$, а его элементы определяются по правилу:

  $$i_{\mu+1} = \alpha_1^{(\mu)}, \quad i_{k-\mu} = \alpha_2^{(\mu)}, \quad i_{\nu+1} \in \Omega^{(\nu)},$$

  где $\alpha^{(\mu)} = \left(\alpha_1^{(\mu)}, \alpha_2^{(\mu)}\right) \in S^{(\mu)}$, $\mu = 0, 1, \ldots, \nu - 1$.

  Причем, если $|W| > |\hat{W}|$, где $|\hat{W}|-$ мощность **рекордного** множества, то только что построенное множество W становится рекордным.

  О п р е д е л е н и е 3.1. Множество W будем называть *рекордным* и обозначать $\hat{W}$, если из рассмотренных множеств его мощность является наибольшей.

- Если $S^{(\nu)} \neq \emptyset$, то в качестве узлового элемента $\alpha^{(\nu)}$ на $\nu-$ом шаге алгоритма выбираем элемент множества $S^{(\nu)}$, удовлетворяющий следующим требованиям:

  а) из всех элементов множества $S^{(\nu)}$, которые ранее не рассматривались в качестве узловых на $\nu-$ом шаге алгоритма;

b) для которых справедливо неравенство

$$2(\nu+1)+|\Omega^{(\nu+1)}|>|\hat{W}|, \tag{3.31}$$

где

$$\Omega^{(\nu+1)}=D_{\alpha^{(\nu)}}\cap\Omega^{(\nu)}\backslash\{\alpha_1^{(\mu)},\alpha_2^{(\mu)}\};\quad \alpha^{(\nu)}=\left(\alpha_1^{(\mu)},\alpha_2^{(\mu)}\right)\in S^{(\nu)}$$

и $|\hat{W}|$ – мощность рекордного элементного основания циклической структуры среди уже рассмотренных ранее. Причем, при построении самого первого элементного основания циклической структуры мощность рекордного множества равна нулю.

Руководствуясь этими соображениями, выберем очередной узловой элемент $\alpha^{(\nu)}$ на $\nu-$ ом шаге алгоритма. Ему соответствует множество $\Omega^{(\nu+1)}$:

c) если $\Omega^{(\nu+1)}=\emptyset$, то процесс построения упорядоченного множества $W=\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$ закончен. В этом случае $k=$ $=2(\nu+1)$, а его элементы определяются по правилу:

$$i_{\mu+1}=\alpha_1^{(\mu)},\quad i_{k-\mu}=\alpha_2^{(\mu)},$$

где $\alpha^{(\mu)}=\left(\alpha_1^{(\mu)},\alpha_2^{(\mu)}\right)\in S^{(\mu)},\ \mu=0,1,\ldots,\nu.$

и если $|W|>|\hat{W}|$, то только что построенное множество W становится рекордным.

d) если $\Omega^{(\nu+1)}\neq\emptyset$, то поднимаемся на следующий уровень, увеличив значение номера шага алгоритма на единицу и переходим на пп.3 данного алгоритма.

Если $S^{(\nu)}\neq\emptyset$, но все элементы этого множества, удовлетворяющие неравенству (3.31), уже рассматривались как узловые на $\nu-$ ом шаге, то необходимо спуститься на уровень ниже – сделать шаг назад по алгоритму (уменьшить значение номера шага на единицу) и перейти на пп.4 данного алгоритма.

З а м е ч а н и е 5.1 Элементы любого упорядоченного множества $W=\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$, построенного по пп.1-пп.4 данного алгоритма, удовлетворяют условию (2.5) *теоремы 2.1.*

Действительно, по построению справедливы следующие включения:

$$\begin{aligned}
&\{i_1, i_k\} \subset E_{i_1}(\varphi) \cap H_{i_k}(\varphi) \cap \Omega^{(0)} \equiv \hat{D}^{(0)},\\
&\Omega^{(1)} = \hat{D}^{(0)} \backslash \{i_1, i_k\};\\
&\{i_2, i_{k-1}\} \subset E_{i_2}(\varphi) \cap H_{i_{k-1}}(\varphi) \cap \Omega^{(1)} \equiv \hat{D}^{(1)},\\
&\Omega^{(2)} = \hat{D}^{(1)} \backslash \{i_2, i_{k-1}\};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\{i_\nu, i_{k+1-\nu}\} \subset E_{i_\nu}(\varphi) \cap H_{i_{k+1-\nu}}(\varphi) \cap \Omega^{(\nu-1)} \equiv \hat{D}^{(\nu-1)},\\
&\Omega^{(\nu)} = \hat{D}^{(\nu-1)} \backslash \{i_\nu, i_{k+1-\nu}\}.
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
k = 2\nu + 1, & \{i_{\nu+1}\} \subset E_{i_\nu}(F) \cap H_{i_{k+1-\nu}}(F) \cap \Omega^{(\nu-1)} \\
k = 2(\nu + 1), & \{i_{\nu+1}, i_{\nu+2}\} \subset E_{i_{\nu+1}}(\varphi) \cap H_{i_{\nu+2}}(\varphi) \cap \Omega^{(\nu)}
\end{array}\right\} \equiv \hat{D}^{(\nu)}.$$

И в силу того, что

$$\hat{D}^{(\nu)} \subset \hat{D}^{(\nu-1)} \subset \dots \hat{D}^{(1)} \subset \hat{D}^{(0)},$$

справедливы включения

$$\{i_\mu, i_{\mu+1}, \dots, i_{k+1-\mu}\} \subset E_{i_\mu}(\varphi) \cap H_{i_{k+1-\mu}}(\varphi); \quad \mu = 1, \dots, k.$$

Что и требовалось доказать.

Следующий пункт алгоритма целиком повторяет фрагмент доказательства *теоремы 2.1,* касающийся условия (2.6). Выполнять этот пункт алгоритма следует лишь после того, как будет построено множество W с максимальной мощностью.

5. Произведем разбиение множества $W = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, на классы $\omega_s,\ s = 1, \dots, n$.

Считаем, что $i_1 \in \omega_1$.

- Элемент i_2 будет принадлежать множеству ω_1, если $i_1 \in E_{i_2}(F)$.
- Если $i_1 \notin E_{i_2}(F)$, то $\omega_1 = \{i_1\}$ и $i_2 \in \omega_2$.

Предположим, что $\{i_1, i_2\} \subset \omega_1$, тогда,

- если $\{i_1, i_2\} \subset E_{i_3}(F)$, то $i_3 \in \omega_1$,

- если $\{i_1, i_2\} \not\subset E_{i_3}(F)$, то $i_3 \in \omega_2$,

Допустим, что уже произведено разбиение множества $W = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ до элемента $i_{\nu_{\eta-1}+d}$ включительно, т.е.

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_{\nu_1}\},\\
&\omega_2 = \{i_{\nu_1+1}, i_2, \ldots, i_{\nu_2}\},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\omega_{\nu-1} = \{i_{\nu_{\eta-2}+1}, \ldots, i_{\nu_{\eta-1}}\},
\end{aligned}$$

и установлено, что

$$\{i_{\nu_{\eta-1}+1}, \ldots, i_{\nu_{\eta-1}+d}\} \subset \omega_\nu.$$

Проверим, принадлежит ли элемент $i_{\nu_{\eta-1}+d+1}$ множеству ω_ν :

- если справедливо включение

  $$\{i_{\nu_{\eta-1}+1}, \ldots, i_{\nu_{\eta-1}+d}\} \subset E_{i_{\nu_{\eta-1}+d+1}}(F), \quad i_{\nu_{\eta-1}+d+1} \in \omega_\nu$$

  и далее проверяем элемент $i_{\nu_{\eta-1}+d+2}$ на принадлежность множеству ω_ν,

- если же

  $$\{i_{\nu_{\eta-1}+1}, \ldots, i_{\nu_{\eta-1}+d}\} \not\subset E_{i_{\nu_{\eta-1}+d+1}}(F),$$

  $$\text{то } \ \omega_\nu = \{i_{\nu_{\eta-1}+d+1}, \ldots, i_{\nu_\eta}\};$$

  $$\nu_\eta = \nu_{\eta-1} + d; \quad i_{\nu_\eta+1} \in \omega_{\nu+1}.$$

Далее проверяем на принадлежность множеству $\omega_{\nu+1}$ элемент $i_{\nu_\eta+2}$.

И так до тех пор, пока не исчерпаем все элементы множества.

Таким образом, в результате работы алгоритма будет построено элементное основание циклической структуры максимальной мощности. Используя *теорему 2.2,* строим перестановку $\pi^* \in P$, на которой СОДУ (2.1) имеет циклическую структуру $CS^m_{\pi^*\varphi}[0, n, r]$ максимальной длины, что и требовалось доказать.

4. Алгоритм решением задачи 2

Решение *задачи 2* сводится, как следует из *теоремы 2.1* и *теоремы 2.3,* к поиску на множестве всех пар взаимно непересекающихся элементных оснований циклической структуры, существующих на множестве I_m, пары, имеющей наибольшую сумму мощностей.

Поиск осуществляется следующим образом:

1. Строим множество $\Omega^{(0)} = \{i \in I_m : i \in E_i(\varphi)\}$, полагая значение уровня $\nu = 0$.

Если множество $\Omega^{(0)} = 0$, то согласно *теореме 2.1,* на множестве I_m не существует множества, являющегося элементным основанием циклической структуры. Это значит, согласно *теореме 2.2, теореме 2.3,* что для любой перестановки $\pi \in P$ предельная циклическая структура $\hat{C}S^m_{\pi\varphi}[l, n, r]$ - нулевая.

2. Используя горизонтальные $E_i(\varphi)$ и вертикальные $H_j(F)$ структурные множества СОДУ (1.1), строим множества

$$D_{(i,j)}(\varphi) = E_i(\varphi) \cap H_j(\varphi) \cap \Omega^{(0)}.$$

3. Строим множество $S^{(\nu)}$ возможных продолжений при выбранных узловых элементах: $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\nu-1)}$:

$$S^{(\nu)} = \{(i, j) \in \Omega^{(\nu)} \times \Omega^{(\nu)},\ i \neq j : \{i, j\} \subset D_{(i,j)}\}.$$

4. Рассмотрим два случая: $S^{(\nu)} = \emptyset$ и $S^{(\nu)} \neq \emptyset$.

- Если $S^{(\nu)} = \emptyset$, то процесс построения упорядоченного множества $W = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ закончен. В этом случае $k = 2\nu + 1$, а его элементы определяются по правилу:

  $$i_{\mu+1} = \alpha_1^{(\mu)}, \quad i_{k-\mu} = \alpha_2^{(\mu)}, \quad i_{\nu+1} \in \Omega^{(\nu)},$$

  где $\alpha^{(\mu)} = \left(\alpha_1^{(\mu)}, \alpha_2^{(\mu)}\right) \in S^{(\mu)},\ \mu = 0, 1, \ldots, \nu - 1.$

  О п р е д е л е н и е 4.1. Пару W_1 и W_2 взаимно непересекающихся элементных оснований циклической структуры, для которой сумма мощностей является наибольшей из уже рассмотренных, будем называть *рекордной* и обозначать $\hat{W}_1$ и $\hat{W}_2$.

  Причем, при построении первой пары элементных оснований, считаем $|\hat{W}_1| = 0$ и $|\hat{W}_2| = 0$.

Если мощность построенного элементного основания циклической структуры множества

$$|W_1| > \frac{1}{2}\left(|\hat{W}_1| + |\hat{W}_2|\right),$$

то переходим на пп.5 данного алгоритма, иначе осуществляем возврат на предыдущий шаг алгоритма, т.е. уменьшаем значение ν на единицу и переходим на пп.4.

- Если $S^{(\nu)} \neq \emptyset$, то в качестве узлового элемента α_ν на $\nu-$ом шаге алгоритма из всех элементов множества $S^{(\nu)}$, которые ранее не рассматривались в качестве узловых на этом шаге алгоритма и для которых справедливо неравенство

$$2\nu + |D_\alpha \cap \Omega^{(\nu)}| > \frac{1}{2}\left(|\hat{W}_1| + |\hat{W}_2|\right); \quad \alpha \in S^{(\nu)}, \tag{4.32}$$

выбираем тот, для которого мощность множества $D_\alpha \cap \Omega^{(\nu)}$ максимальна.

Используя выбранный таким образом элемент $\alpha^{(\nu)} \in S^{(\nu)}$, строим множество

$$\Omega^{(\nu+1)} = D_{\alpha^{(\nu)}} \cap \Omega^{(\nu)} \backslash \{\alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)}\}.$$

  - Если $\Omega^{(\nu+1)} \neq \emptyset$, то увеличиваем номер шага ν на единицу и переходим на пп.3.
  - Если $\Omega^{(\nu+1)} = \emptyset$, то процесс построения упорядоченного множества $W_1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, где $k = 2(\nu+1)$, закончен. Его элементы определяются по правилу

$$i_{\mu+1} = \alpha_1^{(\mu)}, \quad i_{k-\mu} = \alpha_2^{(\mu)},$$

где $\alpha^{(\mu)} = \left(\alpha_1^{(\mu)}, \alpha_2^{(\mu)}\right) \in S^{(\mu)},\ \mu = 0, 1, \ldots, \nu.$
Если мощность построенного множества $|W_1| > \frac{1}{2}\left(|\hat{W}_1| + |\hat{W}_2|\right)$, то переходим на пп.5 алгоритма, иначе осуществляем возврат на предыдущий шаг алгоритма, т.е. уменьшаем значение ν на единицу и переходим на пп.4 рассматриваемого алгоритма.

– Если все элементы $S^{(\nu)}$, удовлетворяющие неравенству (4.32), уже рассматривались как узловые на $\nu-$ом шаге, то необходимо сделать шаг назад по алгоритму для $\nu > 0$, т.е. уменьшить значение номера шага алгоритма на единицу и перейти на пп.4 данного алгоритма. Для $\nu = 0$ перебор (построение) закончен и необходимо перейти на пп.8 этого алгоритма.

В результате работы первых четырех пунктов алгоритма будет построено упорядоченное множество $W_1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Построение второго упорядоченного множества W_2, непересекающегося с первым W_1, будем осуществлять на множестве $\Omega^{(0)} \backslash W_1$.

5. Строим множество

$$\Omega^{(\eta)} = \Omega^{(0)} \backslash W_1, \quad \eta = \nu + 1.$$

6. Множество возможных продолжений на $\eta-$ом шаге алгоритма

$$S^{(\eta)} = \{(i,j) \in \Omega^{(\eta)} \times \Omega^{(\eta)}, i \neq j : \{i,j\} \subset D_{(i,j)}\}.$$

- Если $S^{(\eta)} = \emptyset$, то процесс построения упорядоченного множества $W_2 = \{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$ закончен. В этом случае $l = 2(\eta - \nu - 1) + 1$, а его элементы определяются по правилу:

$$j_{\mu-\nu} = \alpha_1^{(\mu)}, \quad j_{l+\nu+1-\mu} = \alpha_2^{(\mu)}, \quad j_{\eta-\nu} \in \Omega^{(\eta)},$$

где $\alpha^{(\mu)} = \left(\alpha_1^{(\mu)}, \alpha_2^{(\mu)}\right) \in S^{(\mu)}$, $\mu = \nu + 1, \ldots, \eta - 1$. Причем, если

$$|W_1| + |W_2| > |\hat{W}_1| + |\hat{W}_2|,$$

то только что построенные элементные основания циклической структуры становятся рекордными. Далее осуществляется возврат на предыдущий шаг алгоритма, т.е. уменьшается значение η на единицу, и переходим на пп.6, если $\eta > \nu$, иначе на пп.4.

- Если $S^{(\eta)} \neq \emptyset$, то в качестве узлового элемента $\alpha^{(\eta)}$ на $\eta-$ом шаге алгоритма выбираем элемент множества $S^{(\eta)}$, удовлетворяющий следующим требованиям:

a) из всех элементов множества $S^{(\eta)}$, которые ранее не рассматривались в качестве узловых на $\nu-$ом шаге алгоритма;

b) для которых справедливо неравенство

$$|W_1| + 2(\eta - \nu) + |\Omega^{(\eta)} \cap D_\alpha| > |\hat{W}_1| + |\hat{W}_2|, \quad \alpha \in S^{(\eta)}, \tag{4.33}$$

выбираем тот, для которого мощность множества $\Omega^{(\eta)} \cap D_\alpha$ максимальна.

Если все элементы множества $S^{(\eta)}$, удовлетворяющие неравенству (4.33), уже рассматривались как узловые на $\eta-$ом шаге, то необходимо осуществить возврат по алгоритму, т.е. уменьшить значение номера шага алгоритма на единицу и перейти на пп.6 при $\eta > \nu$ и на пп.4 при $\eta \leq \nu$.

7. Используя выбранный таким образом элемент $\alpha^{(\eta)}$, строим множество

$$\Omega^{(\eta+1)} = D_{\alpha^{(\eta)}} \cap \Omega^{(\eta)} \backslash \{\alpha_1^{(\eta)}, \alpha_2^{(\eta)}\}; \quad \alpha_{(\eta)} = \left(\alpha_1^{(\eta)}, \alpha_2^{(\eta)}\right) \in S^{(\eta)}$$

8. Если $\Omega^{(\eta+1)} = \emptyset$, то процесс построения упорядоченного множества $W_2 = \{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ закончен. В этом случае $l = 2(\eta - \nu)$, а его элементы определяются по правилу:

$$j_{\mu-\nu} = \alpha_1^{(\mu)}, \quad j_{l+\nu+1-\mu} = \alpha_2^{(\mu)},$$

где $\alpha^{(\mu)} = \left(\alpha_1^{(\mu)}, \alpha_2^{(\mu)}\right) \in S^{(\mu)}$, $\mu = \nu + 1, \dots, \eta$. Если $|W_1| + |W_2| >$ $> |\hat{W}_1| + |\hat{W}_2|$, то элементные основания циклической структуры становятся рекордными. Далее осуществляется переход на предыдущий шаг алгоритма, т.е. уменьшаем значение η на единицу и возвращаемся на пп.6.

Таким образом, в результате работы пп.1 - пп.7 алгоритма, будут построены два взаимно непересекающихся упорядоченных множества $\hat{W}_1$ и $\hat{W}_2$. Следующим этапом является разбиение на классы эквивалентности, которое проводим аналогично пп.5 алгоритма решения *задачи 1.*

9. Последовательно для множеств $\hat{W}_1$ и $\hat{W}_2$ проводим разбиение на классы эквивалентности, т.е. сначала это делаем для множества $\hat{W}_1$ (согласно пп.5 алгоритма решения *задачи 1*) и получим

множество $\bigcup_{i=1}^{d} \hat{\omega}_i = \hat{W}_1$, для которых справедливы включения

$$\bigcup_{i=\mu}^{d} \hat{\omega}_i \subset E_g(\varphi), \quad \forall g \in \hat{\omega}_\mu;\ \mu = 1, \ldots, d;$$

$$\hat{\omega}_t \cap \hat{\omega}_q = \emptyset,\ t \neq q,$$

а затем для множества $\hat{W}_2$, результатом которого является разбиение

$$\bigcup_{i=1}^{u} \hat{\omega}_{d+i} = \hat{W}_2, \quad \hat{\omega}_t \cap \hat{\omega}_q = \emptyset,\ t \neq q,$$

причем

$$\bigcup_{i=\mu}^{u} \hat{\omega}_{d+i} \subset E_g(\varphi), \quad \forall g \in \hat{\omega}_{\mu+d};\ \mu = 1, \ldots, u.$$

Результатом работы алгоритма является построение двух взаимно непересекающихся элементных оснований циклической структуры, пары, имеющей наибольшую сумму мощностей. Действительно, нами были рассмотрены почти все связки двух взаимно непересекающихся элементных основания циклической структуры на множестве I_m. Из рассмотрения были исключены лишь те, которые заведомо не могли дать рекордной суммы (ограничение (4.33)), а также те, которые не удовлетворяли условию (4.32).

Условие (4.32) выражает симметричность построения элементных оснований циклической структуры W_1 на множестве I_m и элементного основания W_2 на множестве $I_m \backslash W_1$.

Предположим, что нашлась такая пара $\bar{W}_1$ и $\bar{W}_2$ среди пар взаимно непересекающихся элементных оснований циклической структуры, не рассмотренных нами из-за ограничения (4.32), для которой суммарная их мощность превосходит рекордную:

$$|\bar{W}_1| + |\bar{W}_2| > |\hat{W}_1| + |\hat{W}_2|. \tag{4.34}$$

В силу (4.32)

$$|\bar{W}_1| \leq \frac{1}{2}\left(|\hat{W}_1| + |\hat{W}_2|\right),$$

что влечет за собой, с учетом (4.34), неравенство

$$|\bar{W}_2| > \frac{1}{2}\left(|\hat{W}_1| + |\hat{W}_2|\right).$$

Но элементное основание циклической структуры

$$\bar{W}_2 \subset I_m \backslash \bar{W}_1 \subset I_m$$

уже рассматривалось при построении первого элементного основания циклической структуры. Полагаем $W_1^* = \bar{W}_2$, и так как его мощность

$$|W_1^*| > \frac{1}{2}\left(|\hat{W}_1| + |\hat{W}_2|\right),$$

значит, наше предположение (4.34) неверно. Что и требовалось доказать.

Теперь, используя утверждение *теоремы 2.3,* строим перестановку $\pi^* \in P$, на которой СОДУ (2.1) имеет циклическую структуру $CS^m_{\pi^*\varphi}[l, n, r],\ l \in N$ максимальной длины.

5. Пример применения алгоритма выделения структурных особенностей

Рассмотрим работу алгоритма решения *задачи 2*, на примере выделения циклической структуры $CS^m_{\pi^* F}[l, n, r]$ максимальной длины для СОДУ

$$y^{'} = F(x, y), \quad y, F \in R^7,$$

структурная матрица которой имеет вид:

$$A(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

Для старта алгоритма необходимо построить множества:

$$\begin{array}{ll} E_1(F) = \{1, 3, 4\}, & H_1(F) = \{1, 2, 3, 4, 7\}, \\ E_2(F) = \{1, 2, 3, 5, 6\}, & H_2(F) = \{2, 3, 4, 5\}, \\ E_3(F) = \{1, 2, 3, 5\}, & H_3(F) = \{1, 2, 3, 4, 7\}, \\ E_4(F) = \{1, 2, 3, 4, 6\}, & H_4(F) = \{1, 4, 5\}, \\ E_5(F) = \{2, 4, 7\}, & H_5(F) = \{2, 3, 7\}, \\ E_6(F) = \{6\}, & H_6(F) = \{2, 4, 6\}, \\ E_7(F) = \{1, 3, 5, 7\}, & H_7(F) = \{5, 7\}. \end{array}$$

1. Так как множество $\Omega^{(0)} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ не пусто, то на I_m существует перестановка π^*, такая что длина предельной циклической структуры $|\bar{C}S^m_{\pi^* F}[l, n, r]| > 0$.

2. Множества

$$D_{(i,j)} = E_i(F) \cap H_j(F) \cap \Omega^{(0)},\ i \in \Omega^{(0)},\ j \in \Omega^{(0)},\ i \neq j$$

выпишем в порядке убывания мощностей:

$$\begin{array}{lll}
D_{(4,1)} = \{1, 2, 3, 4\}, & D_{(4,3)} = \{1, 2, 3, 4\}, & D_{(1,3)} = \{1, 3, 4\}, \\
D_{(2,1)} = \{1, 2, 3\}, & D_{(2,3)} = \{1, 2, 3\}, & D_{(3,1)} = \{1, 2, 3\}, \\
D_{(4,2)} = \{2, 3, 4\}, & D_{(4,6)} = \{2, 4, 6\}, & D_{(7,1)} = \{1, 3, 7\}, \\
D_{(7,3)} = \{1, 3, 7\}, & D_{(1,4)} = \{1, 4\}, & D_{(2,6)} = \{2, 6\}, \\
D_{(3,2)} = \{2, 3\}. & &
\end{array}$$

Для всех остальных множеств $D_{(i,j)}$ характерным является невключение $\{i, j\} \not\subset D_{(i,j)}$:

$$\begin{array}{lll}
D_{(1,2)} = \{3, 4\}, & D_{(1,6)} = \{4\}, & D_{(1,7)} = \emptyset, \\
D_{(2,4)} = \{1\}, & D_{(2,7)} = \emptyset, & D_{(3,4)} = \{1\}, \\
D_{(3,6)} = \{2\}, & D_{(3,7)} = \emptyset, & D_{(4,7)} = \emptyset, \\
D_{(6,2)} = \emptyset, & D_{(6,3)} = \emptyset, & D_{(6,4)} = \emptyset, \\
D_{(6,7)} = \emptyset, & D_{(7,2)} = \{3\}, & D_{(7,4)} = \{1\}, \\
D_{(6,1)} = \emptyset, & D_{(7,6)} = \emptyset. &
\end{array}$$

3. Выпишем множество возможных продолжений нулевого шага(уровня):

$$S^{(0)} = \{(4, 1),\ (4, 3),\ (1, 3),\ (2, 1),\ (2, 3),\ (3, 1),\ (4, 2),$$

$$(4, 6),\ (7, 1),\ (7, 3),\ (1, 4),\ (2, 6),\ (3, 2)\}.$$

4. Так как $S^{(0)} \neq \emptyset$, то в качестве узлового элемента нулевого уровня выберем $\alpha^{(0)} = (4, 1)$ как первый из элементов множества $S^{(0)}$, для которых мощность

$$D_\alpha \cap \Omega^{(0)}, \quad \alpha \in S^{(0)}$$

равна четырем. Причем для $\alpha^{(0)}$ справедливо неравенство (4.32).

5. Далее строим множество

$$\Omega^{(1)} = \Omega^{(0)} \cap D_{\alpha^{(0)}} \backslash \{\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}\} = \{1, 2, 3, 4\} \backslash \{1, 4\} = \{2, 3\}.$$

Оно не пусто, поэтому, увеличив значение ν на единицу, т.е. $\nu = 1$, строим множество

$$S^{(1)} = \{(2,3),\, (3,2)\}.$$

В качестве узлового элемента на следующем уровне (первом шаге) выбираем $\alpha^{(1)} = (2,3)$, так как для него справедливо неравенство (4.32), и он первый из двух элементов множества $S^{(1)}$, для которых мощность множества

$$D_\alpha \cap \Omega^{(1)}, \quad \alpha \in S^{(1)}$$

равна двум.

6. Множество $\Omega^{(2)}$ пусто. Следовательно, упорядоченное множество W_1 построено. Выпишем его

$$W_1 = \{4, 2, 3, 1\},$$

и так как его мощность равна четырем, т.е. превосходит $\frac{1}{2}(|\hat{W}_1| + |\hat{W}_2|)$, то значение $\eta = \nu + 1 = 2$.

Переходим к построению множества W_2, так как множество

$$\Omega^{(2)} = \Omega^{(0)} \backslash W_1 = \{6, 7\}$$

не пусто. Множество возможных продолжений $S^{(2)} = \emptyset$ и значит $W_2 = \{6\}$. Таким образом, построена пара взаимно непересекающихся упорядоченных множеств W_1 и W_2, суммарная мощность которых превосходит суммарную мощность рекордных упорядоченных множеств $\hat{W}_1$ и $\hat{W}_2$. Поэтому рекордными становятся множества W_1 и W_2, т.е.

$$\hat{W}_1 = \{4, 2, 3, 1\}, \quad \hat{W}_2 = \{6\}.$$

Теперь осуществляем возврат по алгоритму, уменьшая значение η на единицу. Среди элементов множества $S^{(1)}$ остался только один элемент, который еще не рассматривался в качестве узлового $\alpha^{(1)} = (3,2) \in S^{(1)}$. Для него справедливо неравенство (4.32).

Множество возможных продолжений на втором уровне (шаге) – пусто. Следовательно, $W_1 = \{4, 3, 2, 1\}$ и в силу того, что его мощность больше $\frac{1}{2}(|\hat{W}_1| + |\hat{W}_2|)$ переходим на пп.5 алгоритма, строим множество

$$\Omega^{(\eta)} = \{6, 7\}, \quad \eta = \nu + 1 = 2.$$

Множество возможных продолжений $S^{(2)} = \emptyset$, поэтому $W_2 = \{6\}$. В силу того, что

$$|W_1| + |W_2| = |\hat{W}_1| + |\hat{W}_2|,$$

т.е. суммарная мощность новой пары взаимно непересекающихся множеств W_1 и W_2 не превосходит рекордной, осуществляем возврат по алгоритму. Для чего уменьшаем значение η на единицу. В множестве $S^{(1)}$ возможных продолжений все элементы уже рассматривались в качестве узловых, поэтому спускаемся на предыдущий уровень (нулевой), уменьшая значение ν на единицу. На роль узлового элемента выбираем $\alpha^{(0)} = (4,3) \in S^{(0)}$.

Изложение дальнейшего будем вести схематично, так как основные моменты построения множеств W_1 и W_2 подробно обсуждены при прохождении первой ветви.

$$S^{(0)} = \{(4,1),\ (4,3),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,1),\ (4,2),$$

$$(4,6),\ (7,1),\ (7,3),\ (1,4),\ (2,6),\ (3,2)\};$$

1.

$$\nu = 0; \alpha^{(0)} = (4,3); \quad \Longrightarrow \ \Omega^{(1)} = \{1,2\};$$
$$S^{(1)} = \{(2,1)\}; \quad \nu = 1; \alpha^{(1)} = (2,1); \quad \Longrightarrow \ \Omega^{(1)} = \emptyset;$$
$$\Longrightarrow \ W_1 = \{4,2,1,3\}. \quad \Omega^{(2)} = \Omega^{(0)} \backslash W_1 = \{6,7\};$$
$$S^{(2)} = \emptyset; \quad \Longrightarrow \ W_2 = \{6\}. \quad |W_1| + |W_2| = 5,$$

поэтому осуществляем возврат.

2.

$$\nu = 0; \alpha^{(0)} = (1,3); \qquad \Longrightarrow \ \Omega^{(1)} = \{4\};$$
$$S^{(1)} = \emptyset;\ \nu = 1; \Longrightarrow \ W_1 = \{1,4,3\}. \Omega^{(2)} = \Omega^{(0)} \backslash W_1 = \{2,6,7\};$$
$$S^{(2)} = \{(2,6)\};\ \eta = 2; \alpha^{(2)} = (2,6);\ \Longrightarrow \Omega^{(3)} = \emptyset;\ \Longrightarrow \ W_2 = \{2,6\}.$$
$$|W_1| + |W_2| = 5,$$

производим возврат, уменьшая значение η на единицу.

3.

$$\nu = 0; \alpha^{(0)} = (2,1); \quad \Longrightarrow \ \Omega^{(1)} = \{3\};$$
$$S^{(1)} = \emptyset;\ \nu = 1;\ \Longrightarrow \ W_1 = \{2,3,1\}.\ \Omega^{(2)} = \Omega^{(0)} \backslash W_1 = \{4,6,7\};$$
$$S^{(2)} = \{(4,6)\};\ \eta = 2; \alpha^{(2)} = (4,6);\ \Longrightarrow \ \Omega^{(3)} = \emptyset;\ \Longrightarrow \ W_2 = \{4,6\}.$$
$$|W_1| + |W_2| = 5,$$

производим возврат, уменьшая значение η на единицу.

4.

$$\nu = 0; \alpha^{(0)} = (2,3); \quad \Longrightarrow \ \Omega^{(1)} = \{1\};$$
$$S^{(1)} = \emptyset;\ \nu = 1;\ \Longrightarrow\ W_1 = \{2,1,3\}.\ \Omega^{(2)} = \Omega^{(0)} \backslash W_1 = \{4,6,7\};$$
$$S^{(2)} = \{(4,6)\};\ \eta = 2; \alpha^{(2)} = (4,6);\ \Longrightarrow\ \Omega^{(3)} = \emptyset;\ \Longrightarrow\ W_2 = \{4,6\}.$$
$$|W_1| + |W_2| = 5,$$

производим возврат, уменьшая значение η на единицу.

5.

$$\nu = 0; \alpha^{(0)} = (3,1); \quad \Longrightarrow \ \Omega^{(1)} = \{2\};$$
$$S^{(1)} = \emptyset;\ \nu = 1;\ \Longrightarrow\ W_1 = \{3,2,1\}.\ \Omega^{(2)} = \Omega^{(0)} \backslash W_1 = \{4,6,7\};$$
$$S^{(2)} = \{(4,6)\};\ \eta = 2; \alpha^{(2)} = (4,6);\ \Longrightarrow\ \Omega^{(3)} = \emptyset;\ \Longrightarrow\ W_2 = \{4,6\}.$$
$$|W_1| + |W_2| = 5,$$

производим возврат, уменьшая значение η на единицу.

6.

$$\nu = 0; \alpha^{(0)} = (4,2);\ \Longrightarrow \Omega^{(1)} = \{3\};$$
$$S^{(1)} = \emptyset;\ \nu = 1;\ \Longrightarrow\ W_1 = \{4,3,2\}.$$
$$\Omega^{(2)} = \Omega^{(0)} \backslash W_1 = \{1,6,7\};\ S^{(2)} = \{(7,1)\};\ \eta = 2; \alpha^{(2)} = (7,1);$$
$$\Longrightarrow \Omega^{(3)} = \emptyset;$$
$$\Longrightarrow\ W_2 = \{7,1\}.\ |W_1| + |W_2| = 5,$$

производим возврат, уменьшая значение η на единицу.

7.

$$\nu = 0; \alpha^{(0)} = (4,6); \quad \Longrightarrow \ \Omega^{(1)} = \{2\};$$
$$S^{(1)} = \emptyset;\ \nu = 1;\ \Longrightarrow\ W_1 = \{4,2,6\}.$$
$$\Omega^{(2)} = \Omega^{(0)} \backslash W_1 = \{1,3,7\};\ S^{(2)} = \{(7,1),\ (7,3),\ (1,3)\,(3,1)\};$$
$$\eta = 2; \alpha^{(2)} = (7,1);\ \Longrightarrow\ \Omega^{(3)} = \{3\};$$
$$S^{(3)} = \emptyset;\ \Longrightarrow\ W_2 = \{7,3,1\}.\ |W_1| + |W_2| = 6 > |\hat{W}_1| + |\hat{W}_2| = 5,$$
$$\Longrightarrow \hat{W}_1 = \{4,2,6\};\ \hat{W}_2 = \{7,3,1\}.$$

Возврат на один уровень вниз по алгоритму,т.е. уменьшение значение η на единицу, приводит к просмотру на роль узлового на втором шаге элементов (7,3), (1,3), (3,1) множества $S^{(2)}$. Но ни для одного из них не выполняется неравенство (4.33). Дальнейший возврат приводит к просмотру на роль узлового на нулевом уровне элементов: (7,3), (1,4), (2,6), (3,2) множества $S^{(0)}$. Но в силу того, что неравенство (4.32) ни для одного из них не выполняется, поиск пары взаимнонепересекающихся множеств W_1 и W_2, суммарная мощность которых максимальна, можно прекратить.

Затем следует перейти к последнему пункту алгоритма – разбиению множеств $\hat{W}_1$ и $\hat{W}_2$ на классы:

1. Полагаем, что $\{4\} \in \omega_1$, и так как $\{4\} \notin E_2(F)$, то $\omega_1 = \{4\}$. Далее $\{2\} \in \omega_2$, но $\{2\} \notin E_6(F)$, и значит $\omega_2 = \{2\}$ и $\omega_3 = \{6\}$. Таким образом $W_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \{4, 2, 6\}, \quad |\omega_s| = 1,\ s = 1, \ldots, 3$.

2. Аналогично производим разбиение множества $\hat{W}_2$: $\{7\} \in \omega_4$, и так как $\{7\} \notin E_3(F)$, то $\omega_4 = \{7\}$. Далее $\{3\} \in \omega_5$, и $\{3\} \in E_1(F)$, а это значит $\omega_5 = \{3, 1\}$. Множество $W_2(\omega_4, \omega_5) = \{7, 3, 1\}, \quad |\omega_4| = 1$, $|\omega_5| = 2$.

Теперь, воспользовавшись *теоремой 2.3,* можем построить перестановку $\pi^* = (5, 4, 2, 6, 7, 3, 1)$, на которой СОДУ

$$(\pi y)^{'} = \pi F(x, \pi y),$$

имеет циклическую структуру $CS^7_{\pi^* F}[3, 6, r]$, $r = (1, 1, 1, 1, 1, 2)$. Она является предельной. Структурная матрица $A(\pi^* F)$ имеет вид:

$$A(\pi^* F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.36}$$

Указатель литературы

1. *Олемской И. В.* Модификация метода Рунге-Кутта по структуре систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Автореф. дисс.... канд. физ.-матем. наук. Л., ЛГУ, 1987.

Ю.Я. Остов, А.П. Иванов

УПРАВЛЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ ПО ОЦЕНОЧНОЙ МОДЕЛИ

Принцип максимума Понтрягина [1] является эффективным средством исследования задач теории оптимального управления. Однако, при решении задач на основе этого принципа возникают трудности, связанные с численной реализацией двухточечных краевых задач, в частности, с реализацией устойчивого вычислительного процесса [2]. Кроме того, результат решения краевой задачи гарантирует лишь экстремальность найденного управления, и требуется еще дополнительный численный анализ этого решения.

Помимо того, оптимальное управление, найденное в результате решения краевой задачи на основе принципа максимума в его классической формулировке, является программным управлением и при наличии возмущений оказывается не эффективным, т.е. не обеспечивает оптимум заданного критерия качества.

Поэтому (если говорить о прикладном аспекте решения задачи) нет необходимости в "точном" решении задачи оптимального управления: достаточно построить управление, при котором значение оптимизируемого функционала отличается от его оптимального значения не более чем на заданную величину ε. Такое управление называют субоптимальным (оптимальным с точностью до ε в смысле значения оптимизируемого функционала) [2].

Предлагаемая методика синтеза субоптимального управления состоит из трех этапов решения исходной вариационной задачи. На первом этапе производится упрощение модели, описывающей реальный управляемый процесс и заданной обычно в виде системы дифференциальных уравнений. Упрощение этой системы уравнений возможно за счет рационального выбора фазового пространства, независимой переменной интегрирования, замены исходных связей и функционала эквивалентными и т.п. Однако, в большинстве случаев, даже с учётом специфики прикладной задачи, такое упрощение модели не дает желаемого результата в виде синтезированного управления. Поэтому дальнейшее упрощение модели (второй этап) осуществляется на основе принципа расширения, приводящего к вырожденной задаче оптимального управления. И, наконец, третий этап решения задачи предусматривает восстановление неголономной связи, исключенной на втором этапе, и приводит к желаемому результату в виде синтезированного управления (управления с обратной связью) [3].

В данной работе получены новые результаты, которые, с одной стороны, позволяют упростить решение задачи синтеза субоптимального управления движением центра масс летательного аппарата (ЛА) в атмосфере, с другой – являются обобщением подхода, приведенного в работе [8].

Движение центра масс ЛА описывается следующими уравнениями [4]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dv}{dt} = -\frac{X}{m} - g\sin\theta, \quad && v(0) = v_0,\\
&\frac{d\theta}{dt} = \frac{Y}{mv} - \frac{g\cos\theta}{v}, \quad && \theta(0) = \theta_0,\\
&\frac{dH}{dt} = v\sin\theta, && H(0) = H_0,\\
&\frac{d\xi}{dt} = \beta\bar{\rho}\, v, && \xi(0) = \xi_0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $v(t)$ – модуль скорости; $\theta(t)$ – угол наклона траектории к горизонту; $H(t)$ – высота над поверхностью Земли; $\xi(t)$ – безразмерная "взвешенная" длина траектории; t – текущий момент времени, $t \in [0, T]$; m – масса ЛА; g – модуль ускорения свободного падения; $X = (C_{x0} + C_{xi}\alpha^2)\,\rho\, v^2\, S/2$ – лобовое сопротивление ЛА; $Y = C_y^\alpha \alpha\rho v^2 S/2$ – подъемная сила ЛА; $\rho = \rho_0^* \exp(-\beta H)$ – плотность атмосферы на высоте H, $\bar{\rho} \overset{\triangle}{=} \rho/\rho_0^*$; α – угол атаки (управление); S – характерная площадь. В данной модели C_{x0}, C_{xi}, C_y^α, S, m, ρ_0^*, β, g – заданные константы.

Для этой модели ставится следующая задача: максимизировать кинетическую энергию

$$
J(\alpha) = \varphi\big(v(T)\big) = \frac{m\, v^2(T)}{2} \tag{2}
$$

при заданных значениях высоты и "взвешенной" длины траектории полета в конечный момент времени T, т.е.

$$
H(T) - H_T = 0, \tag{3}
$$

$$
\xi(T) - \xi_T = 0. \tag{4}
$$

Здесь H_T и ξ_T – заданные константы.

Угол $\theta(T)$ и конечный момент времени T не фиксированы, что не влияет на общность подхода к решению задачи.

На первом этапе решения исходная система (1) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar{w}}{d\xi} = -\big(\bar{c}_{x0} + \frac{u^2}{2a} + f\text{tg}\theta\big), \qquad \bar{w}(\xi_0) = \bar{w}_0,\\
&\frac{d\theta}{d\xi} = u - f, \quad \theta(\xi_0) = \theta_0,\\
&\frac{d\bar{\rho}}{d\xi} = -\sin\theta, \quad \bar{\rho}(\xi_0) = \bar{\rho}_0,\\
&\frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{\beta\, g}}\,\frac{1}{\bar{\rho}}\,\frac{1}{e^{\bar{w}}}, \quad t(\xi_0) = t_0,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$f = e^{-2\bar{w}}\frac{\cos\theta}{\bar{\rho}}, \tag{6}$$

где

$$\bar{w} = \frac{1}{2}\ln\left(v^2\frac{\beta}{g}\right);$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0^*} = \exp\left(-\bar{h}\right); \qquad \bar{h} = \beta H;$$

$$\bar{c}_{x0} = \frac{C_{x0}\rho_0^* S}{2m\beta}; \qquad a = \frac{(C_y^\alpha)^2\rho_0^* S}{4m\beta C_{xi}}. \tag{7}$$

Соответственно функционал (2) и ограничения (3), (4) перепишутся в виде:

$$\tilde{J}(u) = \tilde{\varphi}\big(\bar{w}(\xi_T)\big) = \bar{w}(\xi_T), \tag{8}$$

$$\bar{\rho}(\xi_T) - \bar{\rho}_T = 0, \tag{9}$$

$$\xi \in [\xi_0, \xi_T], \qquad \xi_0 \overset{\triangle}{=} 0. \tag{10}$$

Гамильтониан системы уравнений (5), (6) и сопряженная система уравнений записываются следующим образом:

$$H = \Psi_0\left[-\left(\bar{c}_{x0} + \frac{u^2}{2a} + f\,\text{tg}\theta\right)\right] + \Psi_1(u - f) + \Psi_2(-\sin\theta) = \text{C}_\text{H} \neq 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\Psi_0}{d\xi} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{w}} = -2f(\Psi_0 \mathrm{tg}\theta + \Psi_1), && \Psi_0(\xi_T) = 1,\\
&\frac{d\Psi_1}{d\xi} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = f(\Psi_0 - \Psi_1 \mathrm{tg}\theta) + \Psi_2 \mathrm{cos}\theta, && \Psi_1(\xi_T) = 0,\\
&\frac{d\Psi_2}{d\xi} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{\rho}} = -f(\Psi_0 \mathrm{tg}\theta + \Psi_1)\frac{1}{\bar{\rho}}, && \Psi_2(\xi_T) = C_2,\\
&u_0(\xi) = \frac{a\Psi_1(\xi)}{\Psi_0(\xi)}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Предполагается, что $u^- < u_0(\xi) < u^+$ ($[u^-, u^+]$ – множество допустимых значений управляющего параметра $u(\xi)$, $\xi \in [\xi_0, \xi_T]$). Для упрощения дальнейших выкладок сделаем следующую замену переменных:

$$
\begin{aligned}
&\chi \overset{\triangle}{=} \Psi_0 \cos^2\theta,\\
&\eta \overset{\triangle}{=} \Psi_1 \,\mathrm{ctg}\theta \equiv \Psi_0\, v\, \mathrm{ctg}\theta,\\
&v \overset{\triangle}{=} \Psi_1/\Psi_0 \equiv u/a,
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\left(\Psi_0 = \chi/\mathrm{cos}^2\theta, \qquad \Psi_1 = \eta\, \mathrm{tg}\theta\right).
$$

Теперь систему (5) – (11) можно представить в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\bar{w}}{d\xi} = -\left(\bar{c}_{x0} + \frac{u^2}{2a} + f\,\mathrm{tg}\,\theta\right), \quad \bar{w}(\xi_0) = \bar{w}_0,\\
&\frac{d\theta}{d\xi} = u - f, \qquad \theta(\xi_0) = \theta_0,\\
&\frac{d\bar{\rho}}{d\xi} = -\mathrm{sin}\theta, \quad \bar{\rho}(\xi_0) = \rho_0,\\
&\frac{d\eta}{d\xi} = -\,\mathrm{ctg}^2\,\theta\left[C_H + \Psi_0\left(\bar{c}_{x0} + \frac{u^2}{2a}\,(1 + 2\,\mathrm{tg}^2\theta)\right)\right],\\
&\quad \eta(\xi_T) = 0,
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\chi}{d\xi} = -2\,\eta\,\mathrm{sin}\theta\,\mathrm{cos}\theta\,(f + a\,\mathrm{tg}\,\theta), \qquad \chi(\xi_{\mathrm{T}}) = \mathrm{cos}^2\theta(\xi_{\mathrm{T}}),\\
&\frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{\beta g}}\,\frac{1}{\bar{\rho}}\,\frac{1}{e^{\bar{w}}}, \qquad t(\xi_0) = t_0.
\end{aligned}
$$

Решение системы (6), (9), (10), (12), (13) численным методом в соответствии с принципом максимума Понтрягина в сущности не намного проще решения задачи в начальной форме (1)–(4). Поэтому перейдем ко второму этапу построения упрощенной модели: поставим задачу оптимизации для системы (6), (8) – (10), (12), (13), предположив, что $f = f(\xi)$ – варьируемая функция, в частности, удовлетворяющая связи (6).

В результате перехода к новой независимой переменной θ (при условии ее монотонности на отрезке интегрирования) функционал такой вариационной задачи запишется в виде:

$$J(f) = \int_{\theta_0}^{\theta_T} \left\{ \frac{-(\bar{c}_{x0} + u^2/(2a) + f\,\mathrm{tg}\,\theta)}{u-f} + \frac{-\lambda_1 \sin\theta}{u-f} + \frac{\lambda_2}{u-f} + \right. \tag{14}$$
$$\left. +\lambda_3 \left[\eta_\theta^{'} + \frac{S_1(\cdot)}{u-f}\right] + \lambda_4 \left[\chi_\theta^{'} - 2\,\eta \sin\theta \cos\theta + \frac{S_2(\cdot)}{u-f}\right] \right\} d\theta,$$

где

$$S_1(\cdot) \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{ctg}^2\theta \left[C_H + \Psi_0(\bar{c}_{x0} + \frac{u^2}{2a}\,(1 + 2\,\mathrm{tg}^2\theta)) \right], \tag{15}$$

$$S_2(\cdot) \stackrel{\triangle}{=} 2\,u\,\Psi_0 \cos^2\theta\,(v + \mathrm{tg}\theta). \tag{16}$$

Необходимые условия оптимальности этого функционала, зависящего от функции f, сводятся к следующим уравнениям (уравнениям Эйлера):

$$\eta_\theta^{'} = \frac{-S_1(\cdot)}{u-f}, \tag{17}$$

$$\lambda_{3\theta}^{'} = \frac{-\partial r(\cdot)/\partial\eta + \lambda_3\,\partial S_1(\cdot)/\partial\eta + \lambda_4\,\partial S_2(\cdot)/\partial\eta}{u-f} - \tag{18}$$
$$-2\,\lambda_4 \sin\theta \cos\theta,$$

$$\chi_\theta^{'} = 2\,\eta \sin\theta \cos\theta - \frac{S_2(\cdot)}{u-f}, \tag{19}$$

$$\lambda_{4\theta}^{'} = \frac{-\partial r(\cdot)/\partial\chi + \lambda_3\,\partial S_1(\cdot)/\partial\chi + \lambda_4\,\partial S_2(\cdot)/\partial\chi}{u-f}, \tag{20}$$

$$-r(\cdot) + \lambda_3 S_1(\cdot) + \lambda_4 S_2(\cdot) = 0, \tag{21}$$

где

$$r(\cdot) \stackrel{\triangle}{=} \bar{c}_{x0} + u^2/(2a) + u\,\mathrm{tg}\theta + \lambda_1 \sin\theta - \lambda_2, \tag{22}$$

$$\lambda_1 = const, \qquad \lambda_2 = const.$$

Уравнение (21) можно представить в виде:

$$\lambda_4 S_2(\cdot) \overset{\triangle}{=} \tilde{R}(\theta, \eta, \chi, \lambda_3), \tag{23}$$

где

$$\tilde{R}(\theta, \eta, \chi, \lambda_3) = r(\cdot) - \lambda_3 S_1.$$

Продифференцировав соотношение (23) с учетом выражений (17) – (20), (22) получим следующее соотношение:

$$\lambda_4 \Big[\frac{\partial S_2}{\partial \theta} + \frac{\partial S_2}{\partial \chi}\,\eta\,\mathrm{sin}2\theta\Big] = \frac{\partial \mathrm{r}(\cdot)}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{r}(\cdot)}{\partial \chi}\,\eta \mathrm{sin}2\theta -$$

$$-\lambda_3 \Big[\frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \frac{\partial S_1}{\partial \chi}\eta \mathrm{sin}2\theta\Big] + \mathrm{S}_1 \lambda_4 \mathrm{sin}2\theta. \tag{24}$$

Разделив обе части уравнения (24) на $(-\tilde{R}{\cdot}S_2)$, и приняв во внимание, что

$$\frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta} = -\lambda_4 \mathrm{sin}2\theta,$$

придем к следующему линейному неоднородному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \chi}\eta \mathrm{sin}2\theta = -\mathrm{V} \left\{ \frac{\partial \mathrm{r}(\cdot)}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathrm{r}(\cdot)}{\partial \chi}\eta \mathrm{sin}2\theta - \right.$$

$$\left. -\lambda_3 \left[\frac{\partial S_1(\cdot)}{\partial \theta} + \frac{\partial S_1(\cdot)}{\partial \chi}\eta \mathrm{sin}2\theta\right] - \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta}\, S_1 \right\} \tilde{R}^{-1}(\theta, \eta, \chi, \lambda_3), \tag{25}$$

где $V(\theta, \eta, \chi, \lambda_3)$ – искомая функция, которая при $\lambda_3 = 0$ удовлетворяет равенству:

$$V(\theta, \eta, \chi, 0) = S_2^{-1}(\theta, \eta, \chi),$$

причем

$$\tilde{R} = \bar{c}_{x0} + \frac{u^2}{2a} + u\,\mathrm{tg}\,\theta + \lambda_1 \mathrm{sin}\theta - \lambda_2 - \lambda_3 \Big\{ \mathrm{ctg}^2\theta \Big[\mathrm{C_H} +$$

$$+\Psi_0(\bar{c}_{x0}+\frac{u^2}{2\,a}\,(1+2\,\mathrm{tg}^2\theta))\Big]\Big\},$$

$$S_1=\mathrm{ctg}^2\,\theta\,\left[C_H+\Psi_0(\bar{c}_{x0}+\frac{u^2}{2a}\,(1+2\,\mathrm{tg}^2\,\theta))\right],$$

$$u=a\frac{\Psi_1}{\Psi_0},\quad \Psi_1=\eta\;\mathrm{tg}\,\theta,\quad \Psi_0=\chi\,(\mathrm{tg}^2\,\theta+1),\tag{26}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial\chi}=\bar{c}_{x0}\,(\mathrm{ctg}^2\,\theta+1)-\frac{u^2}{a}\,(\mathrm{tg}^2\,\theta+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\;\mathrm{ctg}^2\,\theta).$$

Уравнение характеристик для неоднородного уравнения в частных производных (25) записывается так [5]:

$$\frac{d\theta}{1}=\frac{d\eta}{0}=\frac{d\chi}{\eta\mathrm{sin}2\theta}=\frac{d\lambda_3}{0}=-dV\left[V\left\{\left[dss\frac{\partial r}{\partial\theta}+\frac{\partial r}{\partial\chi}(\eta\mathrm{sin}2\theta)-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\lambda_3\left(\frac{\partial S_1}{\partial\theta}+\frac{\partial S_1}{\partial\chi}\,(\eta\mathrm{sin}2\theta)\right)-\frac{\partial\lambda_3}{\partial\theta}\,\mathrm{S}_1\right]\tilde{\mathrm{R}}^{-1}\right\}\right]^{-1}.$$

Четыре независимых интеграла этой системы имеют вид $\eta=C_1,\quad \chi+\eta\mathrm{cos}2\theta/2=\mathrm{C}_2,\quad \lambda_3=C_3,\quad V\tilde{R}=C_4$. Положив $\chi(\theta)\overset{\triangle}{=}C_2-\eta\,\mathrm{cos}2\theta/2$, где $C_2\equiv C_2(\theta)$ – варьируемая функция, $C_3(\theta)\equiv 0$ (при этом $V(\cdot)\equiv S_2(\cdot)^{-1}$, а функция $C_1(\theta)\equiv\eta(\theta)$ такова, что $\eta_\theta^{'}=-S_1(\cdot)/(u-f))$, в соответствии с формулой (21) придем к следующему выражению оптимизируемого функционала (14):

$$J(C_2)=\int_{\theta_0}^{\theta_T}\left\{\mathrm{tg}\theta+C_4(C_2,\theta)\,(C_{2\theta}^{'}-\eta_\theta^{'}\,\mathrm{cos}2\theta/2)\right\}\,d\theta,\tag{27}$$

где

$$C_4(C_2,\theta)=\frac{r(u(C_2,\eta,\theta),\theta)}{S_2(\Psi_0(C_2,\eta,\theta),u(C_2,\eta,\theta),\theta)}.$$

Уравнение Эйлера (необходимое условие оптимальности) для функционала (27) выписывается в виде:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{r(\theta,\eta(\theta),C_2)}{S_2(\theta,\eta(\theta),C_2)}\right\}+\frac{\partial}{\partial C_2}\left\{\frac{r(\theta,\eta(\theta),C_2)}{S_2(\theta,\eta(\theta),C_2)}\right\}\frac{\mathrm{cos}2\theta}{2}\eta_\theta^{'}=0,$$

где функции u и Ψ_0 вычисляются по формулам (26) при условии, что $\chi \equiv C_2 - \eta\cos 2\theta/2$.

С учетом соотношений (15) – (17) и (22) это уравнение сводится к полиномиальному уравнению следующего вида:

$$\gamma(\cdot, v)C - \sigma(\cdot, v) = 0, \tag{28}$$

где $(v, C) \equiv (u/a, C_H/(a\Psi_0) + \bar{c}_{x0}/a)$ – вектор искомых параметров, $(\cdot) \equiv (\theta, \bar{f}, \bar{\lambda}_1, c_0, cs)$ – вектор параметров, от которых зависят коэффициенты полиномов $\gamma(\cdot, v)$ и $\sigma(\cdot, v)$. Здесь $\bar{f} = f/a$, $c_0 = \bar{c}_{x0}/a$, $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1/a$, $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2/a$, $cs = c_0 + \bar{\lambda}_1 \sin\theta - \bar{\lambda}_2$, где константы $\bar{c}_{x0}$, a и функция $f \stackrel{\triangle}{=} f(\theta, \bar{\rho}, \bar{\omega})$ вычисляются соответственно по формулам (7), (6).

В данном конкретном случае полиномы γ и σ имеют следующие представления:

$$\begin{aligned}
&\gamma = v^2 + 4vcs\,\mathrm{ctg}\,\theta + 2cs,\\
&\sigma = 2v^6 + (4\,\mathrm{tg}\,\theta - 2\bar{f})\,v^5 + (-4\,\mathrm{tg}\theta\,\bar{f} - 4\,cs - 1/2 +\\
&\quad +\mathrm{tg}^2\theta)\,v^4 + (2\,\mathrm{ctg}\theta\,cs + 4\,cs\,\bar{f} - 8\,cs\,\mathrm{tg}\theta - 2\,\mathrm{tg}^2\theta\,\bar{f} -\\
&\quad -2\,\bar{\lambda}_1\cos\theta)\,v^3 + (3\,cs + 4\,\mathrm{tg}\theta\,cs\,\bar{f} - 2\,\mathrm{tg}\theta\,\bar{\lambda}_1\cos\theta +\\
&\quad +2\,\bar{\lambda}_1\cos\theta\,\bar{f} - 4\,\mathrm{ctg}\theta\,cs\,\bar{f} - 2\,cs\,\mathrm{tg}^2\theta)\,v^2 +\\
&\quad +(\,2\,\mathrm{tg}\theta\,\bar{\lambda}_1\cos\theta\,\bar{f} - 4\,cs\,\bar{f}\,)\,v.
\end{aligned} \tag{29}$$

Использовав соотношение (21), записанное в виде

$$\lambda_3\,S_1 = r(\cdot) - \lambda_4\,S_2,$$

и повторив буквально выкладки теперь относительно функции S_1, получим еще одно уравнение Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{r(\theta, \chi(\theta), C_1)}{S_1(\theta, \chi(\theta), C_1)}\right\} = 0,$$

которое также сводится к полиномиальному уравнению относительно вектора (v, C) :

$$\beta(\cdot, v)C - \mu(\cdot, v) = 0, \tag{30}$$

причем полиномы μ и β выписываются так:

$$\beta = -2\,v^4 + (2\,\mathrm{ctg}\theta + 4\,\bar{f})\,v^3 + (4 + 4\,\mathrm{tg}^2\theta + 2\,\bar{f}\,(2\,\mathrm{tg}\theta -$$

$$-\mathrm{ctg}\theta))\,v^2 + (2\,cs\,(\mathrm{tg}\theta + \mathrm{ctg}\theta) - 2\,\bar{f}\,(\mathrm{tg}^2\theta + 2) +$$

$$+\lambda_1\cos\theta)\,v - 2\,\bar{f}\,cs(\mathrm{tg}\theta + \mathrm{ctg}\theta) - \bar{\lambda}_1\cos\theta\,\bar{f},$$

$$\mu = \left(\mathrm{tg}^2\theta + 1/2\right)\,v^6 + \left(-(\mathrm{tg}\theta + \mathrm{ctg}\theta)/2 - (1 + 2\,\mathrm{tg}^2\theta)\,\bar{f}\right)\,v^5 +$$

$$+\left(c_0 - 1 - \mathrm{tg}^2\theta + \bar{f}\,(\mathrm{ctg}\theta/2 - \mathrm{tg}^3\theta) - cs\,(1 + 2\,\mathrm{tg}^2\theta)\right)\,v^4 +$$

$$+\left(\bar{f}\,\left(1 + \mathrm{tg}^2\theta\right) - 2\,c_0\,\bar{f} + 2\,cs\,\bar{f}\,\left(1 + 2\,\mathrm{tg}^2\theta\right) + 2\,cs\,\mathrm{tg}\theta\,(1 +\right.$$

$$\left.+\mathrm{tg}^2\theta) - \bar{\lambda}_1\cos\theta\left(1/2 + \mathrm{tg}^2\theta\right) + 2\,c_0\,\mathrm{tg}\theta\ \right)\,v^3 + \left(-5\,\mathrm{tg}\theta\,c_0\,\bar{f} -\right.$$

$$\left.-\mathrm{tg}\theta\,cs\,\bar{f} + 2\,cs\,c_0 + \bar{\lambda}_1\cos\theta\,\bar{f}\,(1/2 + \mathrm{tg}^2\theta)\ \right)\,v^2 +$$

$$+\left(-2\,\mathrm{tg}^2\theta\,c_0\,\bar{f} - 4\,cs\,c_0\,\bar{f}\right)\,v - 2\,cs\,c_0\,\mathrm{tg}\theta\,\bar{f}. \tag{31}$$

Система уравнений (28), (30) путем исключения неизвестного параметра C сводится к алгебраическому уравнению 10-ой степени относительно $v = u/a$, которое можно представить в виде

$$\sigma\,\beta - \mu\,\gamma = 0, \tag{32}$$

где полиномы γ, σ, β и μ вычисляются по формулам (29), (31).

Результаты численного моделирования, приведенные ниже, подтверждают эффективность рассмотренной методики. Синтезированное по упрощённой модели управление u находилось по формуле $u = a\,v$, (v – корень уравнения (32) при текущих значениях фазовых переменных θ, $\bar{\rho}$, $\bar{w}$) и пересчитывалось для угла атаки α, который в исходной системе (1) является управляющим. При этом константы $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$, от которых зависят коэффициенты полинома (32), должны быть подобраны так, чтобы выполнялись заданные граничные условия (9), (10).

Система дифференциальных уравнений (1) интегрировалась методом Рунге-Кутты (4-го порядка точности) с шагом $h_u = 0,02$ при следующих значениях параметров ЛА и атмосферы:

$C_{x0} = 0,1931$; $C_{xi} = 5,88$; $C_y^\alpha = 0,8548046$; $m = 422$; $S = 0,159$; $g = 9,81$. Были рассчитаны два варианта – первый: $\rho_0^* = 2,047$; $\beta = 1,5682E-04$; второй: $\rho_0^* = 1,225$; $\beta = 1,4280E-04$. Начальная точка траектории в обоих вариантах одна и та же: $\xi(0) = 0,00$; $H(0) = 24054,5$; $v(0) = 1088,31$; $\theta(0) = -0,54113$; Терминальные ограничения (3), (4) в обоих вариантах следующие: $H(T) - 0 = 0$; $\xi(T) - 1,42500 = 0$. Результаты счёта этих вариантов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Пара-метр	Вариант 1		Вариант 2	
	Упрощ. модель	Полная модель	Упрощ. модель	Полная модель
λ_1	0.639650	—	-0.224596	—
λ_2	2.658969	—	3.394006	—
T	37.89	37.80	36.15	36.16
$\xi(T)$	1.42500	1.42500	1.42500	1.42500
$H(T)$	-0.019160	0.00000	-0.02752	0.00000
$v(T)$	700.8235	700.8499	858.734	858.961
$\theta(T)$	-0.844910	-0.844283	-0.828160	-0.826503

Следует отметить, что представление (12) является не единственным. В частности, замена второго соотношения выражением

$$\eta = \Psi_1 - \frac{1}{2}\Psi_0(\operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta)$$

приводит к замене четвертого уравнения системы (13) следующим:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\Psi_0\left(\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\theta - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\theta\right) - \operatorname{ctg}\theta\big[C_H + \Psi_0\big(\bar{c}_{x_0} +$$

$$+\frac{1}{2}u(\operatorname{tg}^3\theta - \operatorname{tg}\theta) - \frac{1}{2a}u^2\big)\big].$$

При этом полиномы μ и β в выражении (30) принимают вид:

$$
\begin{aligned}
\mu = \quad & -v^5 \bar{f} \operatorname{ctg} \theta - \left(\frac{5}{2} \operatorname{tg} \theta + 2 \operatorname{tg}^3 \theta - 2\bar{f} - \bar{f} \operatorname{ctg}^2 \theta - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^3 \theta - \right. \\
& \left. -4\bar{f} \operatorname{tg}^2 \theta \right) v^4 - \left(\frac{3}{2} \operatorname{tg}^4 \theta + \frac{1}{2} \bar{f} \operatorname{ctg}^3 \theta - 2\bar{f} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \theta - \right. \\
& \left. -9\bar{f} \operatorname{tg}^3 \theta - \frac{19}{2} \bar{f} \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \theta + 2cs\bar{f} \operatorname{ctg} \theta + 2\bar{f} c_0 - \frac{3}{2} \right) v^3 - \\
& - \left(-2cs\bar{f} \operatorname{ctg}^2 \theta + 5cs \operatorname{tg} \theta + 4cs \operatorname{tg}^3 \theta - 2\lambda_1 \cos^{-1}\theta - \frac{9}{2} \bar{f} \operatorname{tg}^4 \theta - \right. \\
& \left. -cs \operatorname{ctg}^3 \theta + \frac{1}{2} \bar{f} + \frac{1}{2} \bar{f} \operatorname{ctg}^2 \theta - \frac{9}{2} \bar{f} \operatorname{tg}^2 \theta + 6\bar{f} c_0 \right) v^2 - \\
& - \left(-4cs\bar{f} \operatorname{ctg} \theta - 11cs\bar{f} \operatorname{tg} \theta - 6cs\bar{f} \operatorname{tg}^3 \theta - cs \operatorname{ctg}^2 \theta + \right. \\
& +2\lambda_1 \bar{f} \cos^{-1}\theta + \mathrm{cs} \operatorname{tg}^4 \theta - \mathrm{cs} + 4\mathrm{cs}\bar{f} \mathrm{c}_0 \operatorname{ctg} \theta + \mathrm{cs}\bar{f} \operatorname{ctg}^3 \theta + \\
& \left. +cs \operatorname{tg}^2 \theta \right) v - cs\bar{f} (\operatorname{ctg}^2 \theta + 4c_0 - 5 \operatorname{tg}^2 \theta - 3 \operatorname{tg}^4 \theta - 1). \\
\beta = \quad & (4\bar{f} \operatorname{ctg} \theta + \operatorname{ctg}^2 \theta + 1) v^3 + (5 \operatorname{tg} \theta + 4 \operatorname{ctg} \theta + 5\bar{f} - \operatorname{ctg}^3 \theta - \\
& -3\bar{f} \operatorname{ctg}^2 \theta) v^2 + (2\bar{\lambda}_1 \cos\theta \operatorname{ctg} \theta - 5\bar{f} \operatorname{tg} \theta + 2\mathrm{cs} \operatorname{ctg}^2 \theta + \\
& + \operatorname{tg}^2 \theta - 8\bar{f} \operatorname{ctg} \theta + \bar{f} \operatorname{ctg}^3 \theta + 2cs - \operatorname{ctg}^2 \theta) v - \\
& -2\lambda_1 \bar{f} \cos\theta \operatorname{ctg} \theta - 2\mathrm{cs}\bar{f} \operatorname{ctg}^2 \theta - 2\mathrm{cs}\bar{f} + \\
& + \bar{f} \operatorname{ctg}^2 \theta - 3\bar{f} \operatorname{tg}^2 \theta - 2\bar{f}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

В результате система уравнений (28), (30) сводится к уравнению 9-ой степени относительно v. Для этой модификации просчитаны четыре варианта, представленные в таблицах 2 и 3. Начальные данные и другие параметры для таблицы 2 те же, что и для таблицы 1.

Таблица 2

Параметр	Вариант 1		Вариант 2	
	Упрощ. модель	Полная модель	Упрощ. модель	Полная модель
$\bar{\lambda}_1$	1.28319345	—	3.13297631	—
$\bar{\lambda}_2$	2.027789	—	0.93911	—
T	37.88	37.80	36.16	36.16
$\xi(T)$	1.42500	1.42500	1.42500	1.42500
$H(T)$	0.000007	0.00000	0.000001	0.00000
$v(T)$	700.84835	700.8499	858.94127	858.961
$\theta(T)$	-0.844413	-0.844283	-0.82622	-0.826503

В третьем и четвертом вариантах параметры атмосферы (ρ_0^* и β) те же, что и в 1-ом и 2-ом вариантах соответственно, начальные же точки траектории таковы: $\xi(0) = 0,00$; $H(0) = 30000$; $v(0) = 1200$; $\theta(0) = -0,4$; Терминальные ограничения (3), (4) в обоих вариантах следующие: $H(T) - 0 = 0$; $\xi(T) - 1,6500 = 0$. Результаты счёта этих вариантов приведены в таблице 3.

Таблица 3

Параметр	Вариант 3		Вариант 4	
	Упрощ. модель	Полная модель	Упрощ. модель	Полная модель
$\bar{\lambda}_1$	-0.8139678	—	-0.4686645	—
$\bar{\lambda}_2$	3.7192020	—	3.4396021	—
T	51.02	50.79	48.59	48.40
$\xi(T)$	1.6500	1.6500	1.6500	1.6500
$H(T)$	0.00076	0.00000	-0.00077	0.00000
$v(T)$	695.570	695.937	887.81466	888.07
$\theta(T)$	-0.71955	-0.7200	-0.71427	-0.71298

Примечание: под полной моделью следует понимать традиционную схему решения задачи (1) – (4) на основе принципа максимума Понтрягина в его классической формулировке (с интегрированием сопряженной системы).

В результате численного моделирования установлено:

1) синтезированное управление (как управление по обратной связи) оказывает стабилизирующее действие на систему;

2) при управлении, синтезированном по упрощённой модели, и использовании любого из известных интерполяционных методов [6] система (1), (32) интегрируется в два раза быстрее, чем при использовании традиционной схемы решения задачи (1) – (4), т.к. отпадает необходимость интегрировать сопряженную систему (12).

Следует заметить, что последнее уравнение системы (1) можно заменить другим соотношением, например, уравнением нормированной горизонтальной дальности $dl/dt{=}\beta v\cos\theta$ или уравнением "взвешенной" горизонтальной дальности $d\sigma/dt = \beta\bar{\rho}v\cos\theta$ [7].

Полученные результаты имеют следующую физическую интерпретацию: нормированная составляющая силы тяжести (модуль ее равен $\bar{f}$), оптимизируемая на втором этапе решения поставленной задачи, ортогональна вектору скорости центра масс ЛА в любой точке траектории, в этом – содержательная часть изложенной методики.

Указатель литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, 1961. 322 с.
2. *Кирин Н.Е.* Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. Л., Изд-во ЛГУ, 1975. 160 с.
3. *Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М., Машиностроение, 1969. 288 с.
4. *Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С.* Динамика полета. М., Машиностроение, 1973. 616 с.
5. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., Наука, 1969. 424 с.
6. *Захарова И.П.* К задаче управления движением летательного аппарата по оценочной модели // Процессы управления и устойчивость. Труды XXX научной конференции, СПбГУ, 1999, С. 48-52.
7. *Остов Ю.Я.* Синтез управления движением летательного аппарата по оценочной модели // Вопросы механики и процессов управления. Вып.17. СПбГУ, 1996, С. 150-159.
8. *Остов Ю.Я.* Новый вариационный метод в задаче динамики полета // Методы математического моделирования и информационные технологии. Труды ИПМИ КарНЦ РАН, Вып.2, Петрозаводск, 2000, С. 151-163.

В.Т. Приставко, А.Ю. Куриленок

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ МАТРИЧНЫМ ОБЪЕКТОМ

В большинстве теоретических исследований теории управления и их применениях рассматриваются объекты, описываемые *векторными* системами уравнений, однако, широкий класс задач и проблем приводит к *матричным* моделям управления, которые являются естественным расширением векторных моделей управления. В частности, преимуществом матричного подхода является то, что одновременно можно рассматривать не один векторный объект, а целый набор однотипных векторных объектов в их взаимодействии.

1. Введение

В последнее время матричные модели только начинают привлекать исследователей в связи с развитием теорий устойчивости, оптимального управления, фильтрации, дифференциальных игр, которые находят применение в технике, экономике, биологии и медицине.

В данной статье рассматривается задача оптимального управления дискретным матричным объектом, динамика которого описывается линейным матричным уравнением вида

$$X_{t+1} = A(t)X_t + B(t)u_t + F(t), \tag{1}$$

N - заданный конечный момент времени; X_t - матрица фазовых координат размерности $(n \times r)$; u_t - матрица управления размерности $(m \times r)$, $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ - матрицы размерностей $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(n \times r)$ соответственно, элементы которых суть известные вещественнозначные функции скалярного аргумента t, определенные для каждого $t = 0,\ 1,\ ...,\ N-1$. Начальное положение X_0 задано. Ограничения на управление не накладываются. Решение задачи проводится посредством метода динамического программирования Р. Беллмана [1]. Результаты исследований данной задачи применяются при рассмотрении объектов более общего вида

$$X_{t+1} = A_1(t)X_t + X_tA_2(t) + B_1(t)u_1(t) + u_2(t)B_2(t), \tag{2}$$

N - заданный конечный момент времени; X_t - матрица фазовых координат размерности $(n \times k)$; $u_1(t),\ u_2(t)$ - матрицы управления размерности $(m \times k)$ и $(n \times r)$ соответственно; $A_1(t),\ A_2(t),\ B_1(t),\ B_2(t)$ - матрицы размерностей $(n \times n)$, $(k \times k)$, $(n \times m)$, $(r \times k)$ соответственно, элементы которых суть известные вещественнозначные функции скалярного аргумента t, определенные для каждого $t = 0,\ 1,\ ...,\ N-1$. Начальное положение X_0 задано. Управления $u_1(t),\ u_2(t)$ определяются в классе линейных функций, оптимальных в квадратичном смысле.

Преимущества систем вида (2) заключается в том, что они описывают не только одновременное движение множества векторных объектов, но и влияние их друг на друга. К объектам данного типа приводят [4] задачи управления пучком электронов, описания прямого и обратного транспорта крови сердечно-сосудистой системы живого организма, анализа динамики налоговой базы региона и т.д. Приведение матричных объектов к векторным создает трудности аналитического понимания уравнений и создает технические трудности их реализации, связанные с ростом размерности векторов, что видно из ниже приведенного критерия управляемости векторным объектом.

2. Задача управления матричным объектом

Рассмотрим основные положения управления матричными объектами управления [4].

О п р е д е л е н и е 1. Матричная система управления $X_{t+1} = f(t,\, X_t,\, u_t)$ называется *полностью управляемой* на отрезке $[0,\ N]$, если для любых матриц X_0 и X_N найдется такое управление u_t, при котором существует решение Z_t системы, удовлетворяющее условию $Z_0 = X_0,\ Z_N = X_N$.

Критерий управляемости матричных объектов. Для полной управляемости матричной линейной стационарной системы управления $X_{t+1} = A(t)X_t + B(t)u_t$ на промежутке $[0,\ N]$ необходимо и достаточно, чтобы [4]

$$rang(B,\ AB,\ A^2B,\ ...,\ A^{n-1}B) = n,$$

где $X_t,\ u_t, A,\ B$ - матрицы размерностей $(n \times m)$, $(r \times m)$, $(n \times n)$, $(n \times r)$ соответственно, $n \leq N$.

Критерий управляемости векторных объектов. Для полной управляемости матричной стационарной системы управления общего вида (2) на промежутке $[0,\ N]$ необходимо и достаточно, чтобы [4]

$$rang(\mathcal{B},\ \mathcal{A}\mathcal{B},\ \mathcal{A}^2\mathcal{B},\ ...,\ \mathcal{A}^{n-1}\mathcal{B}) = n^2,$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}^{(2)}E & A_{21}^{(2)}E & ... & A_{n1}^{(2)}E \\ A_{12}^{(2)}E & A_{22}^{(2)}E & ... & A_{n2}^{(2)}E \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n}^{(2)}E & A_{2n}^{(2)}E & ... & A_{nn}^{(2)}E \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & ... & 0 & B_{11}^{(2)}E & B_{21}^{(2)}E & ... & B_{m1}^{(2)}E \\ 0 & B_1 & ... & 0 & B_{12}^{(2)}E & B_{22}^{(2)}E & ... & B_{m2}^{(2)}E \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & B_1 & B_{1n}^{(2)}E & B_{2n}^{(2)}E & ... & B_{mn}^{(2)}E \end{pmatrix};$$

$X_t,\ u_1(t),\ u_2(t),\ A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2$ - матрицы размерностей $(n \times n)$, $(m \times n)$, $(n \times r)$, $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(n \times m)$, $(r \times n)$ соответственно, $n^2 \leq N$.

О п р е д е л е н и е 2. Управление u_t будем называть *допустимым*, если оно принадлежит классу U линейных матричных функций вида $u_t = M(t)X_t + C(t)$ с вещественными элементами при всех $t = \overline{0,\ N-1}$.

О п р е д е л е н и е 3. Допустимое управление u_t^{opt} будем называть *оптимальным* в смысле минимизации функционала $J(u_t)$, если

$$J(u_t^{opt}) = \min_{u_t \in U} J(u_t).$$

Пусть на траекториях движения системы (1) задан функционал:

$$J(N,\ X_0,\ u_t) = \mathbf{Sp}(X_N^*\Theta_N X_N + \sum_{t=0}^{N-1} e^{\alpha t}(X_t^* G(t) X_t + u_t^* Q(t) u_t)), \quad (3)$$

где Θ_N - вещественная ограниченная симметрическая положительно-определенная матрица размерности $(n \times n)$; $G(t),\ Q(t)$ - матрицы размерностей $(n \times n)$, $(m \times m\ )$ соответственно, характеризующие ограничения на фазовые координаты и управление, элементы которых суть известные вещественнозначные функции скалярного аргумента t, определенные для каждого $t = 0,\ 1,\ ...,\ N-1$. При этом $G(t)$ - симметрическая неотрицательно-определенная матрица, а $Q(t)$ - симметрическая положительно-определенная матрица для каждого t; $e^{\alpha t}$ - коэффициент дисконтирования, $\alpha \leq 0$. Здесь и далее символ $(^*)$ означает операцию транспонирования. Функционал (3) в других известных авторам работах ранее не рассматривался.

З а м е ч а н и е. В случае стационарной системы (1) ограничения на допустимый уровень величин $X_N,\ X_t,\ u_t$ осуществляется матрицами $\Theta_N,\ G,\ Q$. Например [2], диагональными со следующими элементами: $1/(\Theta_N)_{ii} = max(X_N)^2_{ii}$, $1/G_{ii} = N \times max(X_t)^2_{ii}$, $1/Q_{ii} = N \times max(u_t)^2_{ij}$.

З а д а ч а. Найти управление u_t, $t = \overline{0,\ N-1}$, (то-есть последовательность управляющих сигналов $\{u_t\}_{t=0}^{N-1}$) из класса допустимых управлений U, которое минимизирует функционал (3).

3. Оптимальное управление матричным объектом

Рассмотрим задачу управления дискретным матричным объектом, динамика которого описывается линейным матричным уравнением (1).

Теорема 1. *В классе допустимых управлений системой* (1) *существует оптимальное управление* u_t^{opt}, *которое определяется формулой* :

$$u_t^{opt} = -R^{-1}B^*(t)(\Theta_{t+1}A(t)X_t + \Theta_{t+1}F(t) + \Phi_{t+1}), \tag{4}$$

где $R(t) = B^*(t)\Theta_{t+1}B(t) + e^{\alpha t}Q(t)$. *При этом движение объекта управления определяется решением рекуррентного матричного уравнения* (1), *а минимальное значение функционала* (3) *дается формулой* :

$$J_{min} = J(u_t^{opt}) = \mathbf{Sp}(X_0^*\Theta_0 X_0 + X_0^*\Phi_0 + \Phi_0^* X_0 + \gamma_0). \tag{5}$$

Матрицы $\Theta_t,\ \Phi_t,\ \gamma_t$ *- матрицы размерностей* $(n \times n)$, $(n \times r)$ и $(r \times r)$ *определяются рекуррентными уравнениями в обратном времени:*

$$\Theta_t = A^*(t)(\Theta_{t+1} - \Theta_{t+1}B(t)R^{-1}(t)B^*(t)\Theta_{t+1})A(t) + e^{\alpha t}G(t),$$

$$\Phi_t = A^*(t)(\Phi_{t+1} + \Phi_{t+1}F(t) - \Theta_{t+1}B(t)R^{-1}(t)B^*(t)(\Phi_{t+1} + \Theta_{t+1}F(t)),$$

$$\gamma_t = \gamma_{t+1} + F^*(t)(\Theta_{t+1}F(t) + \Phi_{t+1}) + \Phi^*_{t+1}F(t) -$$
$$-(F^*(t)\Theta_{t+1} + \Phi^*_{t+1})B(t)R^{-1}B^*(t)(\Phi_{t+1} + \Theta_{t+1}F(t))$$

с начальными условиями $\Theta_{t=N} = \Theta_N$, $\Phi_N = \gamma_N = 0$.

Доказательство. Решение задачи начнем с последнего шага $t = N-1$, предполагая, что состояние X_{N-1} нам известно. Согласно принципа оптимальности Р. Беллмана [1] управление u_{N-1} должно быть выбрано так, чтобы минимизировать соответствующую частичную сумму

$$J_{N-1} = \mathbf{Sp}(X^*_N\Theta_N X_N + X^*_N\Phi_N + \Phi^*_N X_N + \gamma_N +$$
$$+e^{\alpha(N-1)}(X^*_{N-1}G(N-1)X_{N-1} + u^*_{N-1}Q(N-1)u_{N-1})),$$

где $\Phi_N = \gamma_N = 0$. Подставляя в это выражение X_N из (1) и сделав элементарные преобразования, получим:

$$J_{N-1} = \mathbf{Sp}(F^*\Theta_N F + F^*\Theta_N AX_{N-1} + F^*\Theta_N Bu_{N-1} +$$
$$+u^*_{N-1}B^*\Theta_N AX_{N-1} + u^*_{N-1}B^*\Theta_N Bu_{N-1} + u^*_{N-1}B^*\Theta_N F +$$
$$+X^*_{N-1}A^*\Theta_N AX_{N-1} + X^*_{N-1}A^*\Theta_N Bu_{N-1} + X^*_{N-1}A^*\Theta_N F +$$
$$+F^*\Phi_N + u^*_{N-1}B^*\Phi_N + X^*_{N-1}A^*\Phi_N + \Phi^*_N AX_{N-1} + \Phi^*_N Bu_{N-1} +$$
$$+\Phi^*_N F + \gamma_N + e^{\alpha(N-1)}(X^*_{N-1}G(N-1)X_{N-1} + u^*_{N-1}Q(N-1)u_{N-1})).$$

Поскольку состояние X_{N-1} предполагается известным, то это выражение зависит лишь от одной неизвестной величины u_{N-1}, которая должна быть найдена из условия минимизации величины J_{N-1}. Из необходимого условия минимума функционала $(\partial J_{N-1}/\partial u_{N-1} = 0)$ следует:

$$\frac{\partial \mathbf{J}_N(u_{N-1})}{\partial u_{N-1}} = 2(B^*\Theta_N F + B^*\Phi_N + B^*\Theta_N AX_{N-1} +$$
$$+(e^{\alpha(N-1)}Q + B^*\Theta_N B)u_{N-1}) = 0.$$

Тогда

$$u^{opt}_{N-1} = -R^{-1}B^*(\Theta_N AX_{N-1} + \Theta_N F + \Phi_N), \qquad (6)$$

где $R = B^*\Theta_N B + e^{\alpha(N-1)}Q$. Так как Θ_N - положительно-определенная матрица, то матрица $B^*\Theta_N B$ - неотрицательно-определенная [3] и, так как Q положительно-определенная, то сумма положительно-определенной и неотрицательно-определенной матриц R есть положительно-определенная матрица. Вследствие того, что положительно-определенная матрица является неособой, R^{-1} существует.

Убедимся в том, что u_{N-1}^{opt} действительно доставляет минимум частичному функционалу J_{N-1}. Для этого вычислим вторую производную от J_{N-1} и покажем, что эта матрица является положительно-определенной (достаточное условие минимума).

Элементарные вычисления показывают, что матрица $\partial^2 \mathbf{J}_N(u_{N-1})/\partial^2 u_{N-1}$ есть симметрическая блочная матрица размерности $(nm \times nm)$, блоки которой имеют вид $2Er_{ij}$, где E - единичная матрица размерности $(n \times n)$. Тогда, так как матрица R является положительно-определенной, то и $\partial^2 \mathbf{J}_N(u_{N-1})/\partial^2 u_{N-1}$ является положительно-определенной матрицей.

Рассмотрим теперь два последних шага $t = N-1$ и $t = N-2$. Согласно (3) им соответствует частичная сумма

$$J_{N-2} = J_{N-1} + \mathbf{Sp}(e^{\alpha(N-2)}(X_{N-2}^* G(N-2) X_{N-2} + \\ + u_{N-2}^* Q(N-2) u_{N-2})). \tag{7}$$

Состояние X_{N-2} будем предполагать известным. Из принципа оптимальности следует, что лишь состояние X_{N-2} и цель управления (минимизация J_{N-2}) определяют оптимальное управление на этих двух шагах. Нетрудно убедится в том, что аналогичные расчеты дадут нам вид оптимального управления в точке $t = N-2$:

$$u_{N-2}^{opt} = -R^{-1} B^* (\Theta_{N-1} A X_{N-2} + \Theta_{N-1} F + \Phi_{N-1}),$$

где $R = B^* \Theta_{N-1} B + e^{\alpha(N-2)} Q$.

Продолжая рассуждения таким же образом до $t = 0$, методом математической индукции нетрудно показать, что оптимальное управление определяется формулой (4).

Так как состояние X_0 задано, то значение u_0^{opt} определяется однозначно. Тогда согласно (1) найдется состояние X_1 и определится значение u_1^{opt}. После этого согласно (1) найдется состояние X_2 и определится u_2^{opt} и т.д.

Из приведенных формул следуют рекуррентные уравнения в обратном времени для матриц $\Theta_t,\ \Phi_t,\ \gamma_t$, приведенные в условиях теоремы.

Докажем положительную определенность матриц Θ_t. Так как они определяются рекуррентным уравнением, то достаточно показать положительную определенность матрицы Θ_{N-1}:

$$\Theta_{N-1} = A^*(\Theta_N - \Theta_N B(B^*\Theta_N B + e^{\alpha(N-1)}Q)^{-1}B^*\Theta_N)A(t)+$$
$$+e^{\alpha(N-1)}G(t).$$

Используя лемму об обращении матриц [2, стр. 410, 436], можем написать

$$\Theta_N - \Theta_N B(B^*\Theta_N B + e^{\alpha(N-1)}Q)^{-1}B^*\Theta_N =$$
$$= (\Theta_N^{-1} + B(e^{\alpha(N-1)}Q)^{-1}B^*)^{-1}.$$

Следовательно

$$\Theta_{N-1} = A^*(\Theta_N^{-1} + B(e^{\alpha(N-1)}Q)^{-1}B^*)^{-1})A + e^{\alpha(N-1)}G(t).$$

Матрица Θ_N является положительно-определенной, а обратная к положительно-определенной матрице также является положительно-определенной матрицей. Следовательно, так как $A \neq 0$ и $B \neq 0$, то и первое слагаемое является положительно-определенной матрицей. Сумма положительно-определенной и неотрицательно-определенной есть матрица положительно-определенная и, следовательно, матрица Θ_{N-1} является положительно-определенной.

В силу рекуррентности рассматриваемого уравнения все Θ_t будут положительно - определенными. Таким образом, теорема доказана полностью.

4. Квазиоптимальное управление матричным объектом

Рассмотрим дискретную матричную линейную управляемую модель общего вида (2). Методом замены матричной переменной на векторную задача оптимального по отношению к функционалу (3) управления решена полностью [4]. Однако, в виду больших размерностей матриц и трудностей технической реализации вычислений рассмотрим решение задачи синтеза управляющих последовательностей матричными методами теоремы 1. Сделаем замену матричной переменной X_t, $\;X_t = Y_t + Z_t^*$. Тогда

$$X_{t+1} = Y_{t+1} + Z_{t+1}^* = A_1(t)Y_t + Y_t A_2(t)+$$

$$+A_1(t)Z_t^* + Z_t^* A_2(t) + B_1(t)u_1(t) + u_2(t)B_2(t).$$

Предположим, что $u_1(t) = U_1(t) + M_1(t)Z_t^*,\ u_2(t) = U_2(t) + Y_t M_2(t)$, где матрицы M_1 и M_2 будут определены ниже. Тогда уравнение (2) разбивается на две подсистемы

$$Y_{t+1} = A_1(t)Y_t + B_1(t)U_1(t) + (A_1(t) + B_1(t)M_1(t))Z_t^*,$$

$$Z_{t+1}^* = Z_t^* A_2(t) + U_2(t)B_2(t) + Y_t(A_2 + M_2 B_2(t)).$$

Транспонируя вторую систему и вводя обозначения

$$F_1(t) = (A_1(t) + B_1(t)M_1(t))Z_t^*, \quad F_2(t) = (A_2 + M_2B_2(t))^* Y_t^*,$$

получим

$$\begin{gathered} Y_{t+1} = A_1(t)Y_t + B_1(t)U_1(t) + F_1(t), \\ Z_{t+1} = A_2^*(t)Z_t + B_2^*(t)U_2^* + F_2(t) \end{gathered} \tag{8}$$

два дискретных матричных уравнения вида (1). Выбор начальных условий для системы (8) остается за исследователем. Например, $Y_0 = E$ (единичная матрица), тогда $Z_0^* = X_0 - E$ или $Y_0 + X_0, Z_0 = 0$. Примем за критерий оптимальности управления $U_1(t)$ функционал

$$J^{(1)}(N,\ Y_0,\ U_1(0),\ ...,\ U_1(N-1)) = \mathbf{Sp}(Y_N^* \Theta_N^{(1)} Y_N +$$

$$+ \sum_{t=0}^{N-1} e^{\alpha_1 t}(Y_t^* G_1(t) Y_t + U_1(t)^* Q_1(t) U_1(t))), \tag{9}$$

а управления $U_2(t)$ - функционал

$$J^{(2)}(N,\ Z_0,\ U_2(0),\ ...,\ U_2(N-1)) = \mathbf{Sp}(Z_N^* \Theta_N^{(2)} Z_N +$$

$$+ \sum_{t=0}^{N-1} e^{\alpha_2 t}(Z_t^* G_2(t) Z_t + U_2(t)^* Q_2(t) U_2(t))). \tag{10}$$

Тогда из теоремы 1 следует:

$$U_1^{opt}(t) = -R_1^{-1} B_1^*(t)(\Theta_{t+1}^{(1)} A_1(t) Y_t + \Theta_{t+1}^{(1)} F_1(t) + \Phi_{t+1}^{(1)}), \tag{11}$$

где $R_1(t) = B_1^*(t)\Theta_{t+1}^{(1)} B_1(t) + e^{\alpha_1 t} Q_1(t)$,

$$(U_2^{opt}(t))^* = -R_2^{-1} B_2(t)(\Theta_{t+1}^{(2)} A_2^*(t) Z_t + \Theta_{t+1}^{(2)} F_2(t) + \Phi_{t+1}^{(2)}), \tag{12}$$

где $R_2(t) = B_2(t)\Theta^{(2)}_{t+1}B_2(t)^* + e^{\alpha_2 t}Q_2(t)$. Вспомогательные матричные переменные $\Theta_t^{(1,\,2)}$, $\Phi_t^{(1,\,2)}$, $\gamma_t^{(1,\,2)}$ определяются аналогичными рекуррентными уравнениями из теоремы 1.

Следует отметить, что при этом движение объекта управления определяется решением рекуррентной матричной системы уравнений поочередно. Сначала вычисляется Y_1, затем Z_1, потом Y_2 , затем Z_2 и т.д.

Определим теперь матрицы $M_1(t)$ и $M_2(t)$ таким образом, чтобы управления $u_1(t) = U_1(t) + M_1(t)Z_t^*$ и $u_2(t) = U_2(t) + Y_tM_2(t)$ были допустимыми и зависили от матричной переменной X_t фазовых координат системы (2). Тогда из соотношений (11-12) вполне очевидным образом следует

$$M_1(t) = -R_1^{-1}B_1^*(t)\Theta^{(1)}_{t+1}A_1(t), \quad M_2(t) = -A_2(t)\Theta^{(2)}_{t+1}B_2^*(t)R_2^{-1}(t).$$

Следовательно

$$u_1^{opt}(t) = -R_1^{-1}B_1^*(t)(\Theta^{(1)}_{t+1}A_1(t)X_t + \Theta^{(1)}_{t+1}F_1(t) + \Phi^{(1)}_{t+1}), \tag{13}$$

$$u_2^{opt}(t) = -(X_tA_2(t)\Theta^{(2)}_{t+1} + F_2^*(t)\Theta^{(2)}_{t+1} + \Phi^{(2)}_{t+1})B_2^*R_2^{-1}. \tag{14}$$

Минимальные значения соответствующих функционалов даются формулами:

$$J^{(1)}_{min} = \mathbf{Sp}(Y_0^*\Theta_0^{(1)}Y_0 + Y_0^*\Phi_0^{(1)} + (\Phi_0^{(1)})^*Y_0 + \gamma_0^{(1)}), \tag{15}$$

$$J^{(2)}_{min} = \mathbf{Sp}(Z_0^*\Theta_0^{(2)}Z_0 + Z_0^*\Phi_0^{(2)} + (\Phi_0^{(2)})^*Z_0 + \gamma_0^{(2)}), \tag{16}$$

Таким образом доказана следующая теорема 2 квазиоптимального управления матричным объектом.

Теорема 2. *В классе допустимых управлений существуют оптимальные управления* $u_1(t)$ и $u_2(t)$ *для системы уравнений* (2), *которые определяется формулами* (13-14). *При этом движение объекта управления определяется решением рекуррентного матричного уравнения* (2), *а минимальное значение функционалов* (9-10) *дается формулами* (15-16).

В продолжение изложенных исследований будет рассмотрена задача нахождения оценки близости найденного управления к оптимальному по отношению к функционалу (3).

У к а з а т е л ь   л и т е р а т у р ы

1. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М., Изд-во “ИЛ”. 1960. 200 с.

2.*Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. Перев. с англ., М., “Мир”. 1972. 544 с.

3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. Изд. 2-е, М., Наука. 1966. 576 с.

4. *Приставко В.Т.* Матричные модели управления. СПб., НИИ Химии СПбГУ, 2001. 255 с.

Г.М. Хитров

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ВИЕТА О КОРНЯХ

Рассмотрим определитель

$$g_k = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \ldots & \sigma_{k-1} & \sigma_k \\ 1 & \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sigma_1 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \sigma_1 \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

где σ_i — элементарные симметрические многочлены от переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$

$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,$

$\sigma_2 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n,$

.... ,

$\sigma_n = x_1x_2x_3 \ldots x_n.$

Напомним, что многочлен от n переменных называется симметрическим, если он не изменяется при любых перестановках переменных [1, стр. 284]. Ясно, что если симметрический многочлен от n переменных содержит член $\alpha x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$ (среди целых неотрицательных чисел $p_1, \ldots, p_n$ могут быть и равные нулю; α - некоторое число), то он содержит и все различные члены, полученные путем перестановки переменных.

Будем называть многочлен от n переменных *моногенным*, если все составляющие его одночлены получаются один из другого посредством перестановки переменных [1, стр. 285]. Моногенный многочлен, порожденный членом $\alpha x_1^{p_1}...x_n^{p_n}$, будем обозначать как $\alpha s(x_1^{p_1}...x_n^{p_n})$ (α – общий множитель, можно вынести за обозначение моногенного многочлена, порожденного членом $x_1^{p_1}...x_n^{p_n}$). Если некоторые p_i равны нулю, например, $p_{q+1} = ... = p_n = 0$, то соответствующие переменные можно не выписывать, и тогда $\alpha s(x_1^{p_1}...x_n^{p_n}) = \alpha s(x_1^{p_1}...x_q^{p_q})$.

Нетрудно видеть, что все элементарные симметрические многочлены являются моногенными и во введенных обозначениях могут быть записаны следующим образом:

$$\sigma_1 = s(x_1),\ \sigma_2 = s(x_1 x_2),\ ...,\ \sigma_n = s(x_1 ... x_n).$$

Нетрудно также видеть, что любой симметрический многочлен может быть представлен в виде суммы различных моногенных многочленов. Такое представление мы будем называть *разложением* симметрического многочлена в сумму моногенных многочленов. Очевидно, что это разложение будет единственным. Одночлены, составляющие моногенный многочлен, мы можем лексикографически упорядочить. Одночлен, стоящий на первом месте при таком упорядочении, будем называть высшим. Для него в записи $x_1^{p_1}...x_q^{p_q}$ характерно то, что $p_1 \geq p_2 \geq\ ...\ \geq p_q$. Все такие члены в дальнейшем мы будем называть *высшими*.

Из теории симметрических многочленов нам понадобятся следующие факты: сумма, разность, произведение симметрических многочленов являются симметрическими многочленами, а также - высший член произведения равен произведению высших членов сомножителей.

Нас в первую очередь будут интересовать однородные симметрические многочлены k-го порядка. Из вышеизложенного следует, что любой однородный симметрический многочлен k-го порядка $f(x_1, ..., x_n)$ может быть представлен в виде:

$$f(x_1, ..., x_n) =$$

$$= \sum_{\left(\substack{p_1 \geq p_2 \geq\ \cdots\ \geq p_k \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{k} p_i = k} \right)} \alpha_{p_1 ... p_k} s(x_1^{p_1} ... x_k^{p_k}). \quad (2)$$

Суммирование ведется по всевозможным наборам целых неотрицательных p_1, ..., p_k, удовлетворяющих указанным выше условиям; $\alpha_{p_1 \dots p_k}$ – числовые коэффициенты при всевозможных моногенных многочленах $s(x_1^{p_1} \dots x_k^{p_k})$. Если некоторые из чисел $p_k = p_{k-1} = \dots = p_{k-q} = 0$, то, не оговаривая это особо, мы будем их и переменные x_k, x_{k-1}, ..., x_{k-q} опускать при написании. Вернемся к определителю (1) и, разлагая его по элементам первой строки, получим:

$$g_k = \sigma_1 g_{k-1} - \sigma_2 g_{k-2} + \sigma_3 g_{k-3} - \dots + (-1)^{k-1} \sigma_k, \qquad (3)$$

где g_r, $(r = 1, 2, \dots, k-1)$, – определители той же структуры, что и g_k, но меньшего порядка. Они равны последовательным главным минорам определителя g_k, расположенным в левом верхнем углу.

Соотношение (3) – не что иное, как рекуррентная формула для вычисления определителя g_k. Нетрудно видеть, что g_k будет однородным симметрическим многочленом от n переменных k-го порядка вида (2).

Следовательно, вычисление определителя g_k, как симметрического многочлена k-го порядка от n переменных, сводится к вычислению коэффициентов $\alpha_{p_1 \dots p_q}$ $(p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_q \geq 1,\ \sum\limits_{i=1}^{q} p_i = k,\ 1 \leq q \leq k)$. Для определителя g_k имеет место следующая

Теорема. *Все коэффициенты $\alpha_{p_1 \dots p_k}$ в представлении* (2) *определителя g_k равны единице.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы будем проводить индукцией по k. При k = 1 утверждение очевидно.

Предположим, что утверждение теоремы имеет место для всех определителей g_r, где $1 \leq r < k$, и покажем, что оно имеет место и для определителя g_k.

Для этого вычислим коэффициент при $s(x_1^{p_1} \dots x_q^{p_q})$, $(p_1 \geq p_2 \geq \dots, \geq p_q \geq 1,\ \sum\limits_{i=1}^{q} p_i = k,\ 1 \leq q \leq k)$, в разложении правой части соотношения (2) при индуктивном предположении относительно определителей g_r, $1 \leq r < k$. Он получится путем суммирования соответствующих коэффициентов в разложениях симметрических многочленов $(-1)^{j-1} \sigma_j g_{k-j}$ $(1 \leq j \leq q,\ 1 \leq q \leq k,\ q_0 \equiv 1)$. Коэффициент же при $s(x_1^{p_1} \dots x_q^{p_q})$ в разложении $\sigma_j g_{k-j}$ равен числу различных вариантов получения члена $x_1^{p_1} \dots x_q^{p_q}$ при перемножении членов $x_{\alpha_1}...x_{\alpha_j}$ $(1 \leq \alpha_1 < ... < \alpha_j \leq q)$ из σ_j на соответствующий член из g_{k-j}, т.е. равен C_q^j (числу сочетаний из q по j).

Следовательно, суммируя, получаем, что

$$\alpha_{p_1...p_q} = C_q^1 - C_q^2 + C_q^3 - ... + (-1)^{q-1} C_q^q. \tag{4}$$

Сумма, стоящая в правой части равенства (4), как нетрудно видеть, равна единице (получается из известного тождества: $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^i = 0$).

Тем самым теорема доказана.

Следовательно,

$$g_k = \sum_{\left(\substack{p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_k \geq 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} p_i = k}\right)} s(x_1^{p_1}...x_k^{p_k}). \tag{5}$$

З а м е ч а н и е 1. В случае m переменных, когда $m < k \leq n$, полагаем $x_{m+1} = ... = x_n = 0$, а также $\sigma_{m+1} = ... = \sigma_k = 0$.

З а м е ч а н и е 2. Если на формулы Виета [2, стр. 694] смотреть как на выражение элементарных симметрических многочленов от корней многочлена n-ой степени через коэффициенты этого многочлена, то на формулу (5) можно смотреть как на обобщение упомянутых формул Виета. Она позволяет выразить однородный симметрический многочлен k-го порядка с единичными коэффициентами от корней многочлена через коэффициенты этого многочлена (или через элементарные симметрические многочлены).

У к а з а т е л ь л и т е р а т у р ы

1. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. М., "Наука", 1984. 416 с.

2. Математическая энциклопедия. Том 1. М., изд-во "Советская энциклопедия", 1977. 1151 с.

РЕФЕРАТЫ

УДК 532.591

Алешков Ю. З. **Математическая теория волн на воде** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 64–74.

Рассматриваются задачи о волнах на воде на основе потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости. Приводится модель Лагранжа в случае длинных волн, решаются задачи о распространении волн, вызванных начальным возмущением свободной поверхности, и набегании волн на берег при постоянном уклоне дна. Библиогр. 9 назв.

УДК 621.865.8.001

Алфёров Г.В. **К вопросу об управлении роботом** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 74–83.

Рассматриваются некоторые вопросы построения иерархической системы интеллектного управления. Описываются три взаимодействующих уровня: стратегический, тактический и управленческий. Показывается, что структура управления роботом должна быть усовершенствована путем введения в систему базы знаний. Библиогр. 5 назв.

УДК 517.596

Голицын Е.В., Летавин М.И. **О сингулярной задаче нагрева вращающегося цилиндра с нелинейными тепловыми характеристиками** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 83–91.

В статье рассматривается квазистационарное температурное поле в сечении вращающегося цилиндра с нелинейными тепловыми характеристиками. Построено и обосновано асимптотическое разложение температуры по малому параметру обратному критерию Предводителева. Разложение применяется к анализу оптимизации температурного поля при помощи внешнего конвективного и радиационного теплообмена. Библиогр. 15 назв.

УДК 517.43

Горьковой В.Ф. **Дифференцирование в пространствах без нормы** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 91–96.

В работе приводится определение производной в топологических пространствах, наделенных равномерной структурой. Для этого вводится понятие представления функции относительно некоторой точки. Приводятся формулировки теоремы о среднем в топологических пространствах, правила дифференцирования суперпозиции, дифференцирования функций двух, а значит и многих, переменных. Библиогр. 1 назв.

УДК 517.5

Жук В.В., Тумка О.А. **Некоторые приложения формулы Эйлера–Маклорена к нахождению точных неравенств для полунорм производных функций двух переменных** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 96–102.

В работе установлена общая теорема, с помощью которой удается получить ряд новых точных неравенств для полунорм производных в двумерном случае. Библиогр. 12 назв.

УДК 517.9

Заика Ю. В. **Сопряженные задачи наблюдения нелинейных динамических систем** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 102–126.

В терминах функциональной зависимости получено описание наблюдаемых функций в нелинейных динамических системах, аналитических по фазовым переменным. Для обработки измерений используются интегральные операторы, что влечет определенную помехоустойчивость операции восстановления. Развивается аналог теории двойственности, известной для линейных задач наблюдения и управления. Предложены вычислительные схемы решения нелинейных задач наблюдения. Библиогр. 17 назв.

УДК 519.36

Квитко А. Н. **Решение одной задачи управления** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 127–136.

Предложен алгоритм перевода нелинейной управляемой системы дифференциальных уравнений из заданного начального состояния в фиксированное конечное состояние с учетом ограничений на фазовые координаты. Библиогр. 6 назв.

УДК 517.382

В. Ф. Кузютин, О. Н. Шедвартене, М. Дехгхан, А. Хеммат. **Оценки погрешностей составных квадратур на некоторых классах функций** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 137–141.

В статье получены оценки погрешностей составных квадратур Ньютона, Милна, трапеций на соболевских классах функций в явной зависимости от числа узлов N. Библиогр. 3 назв.

УДК 518.9

Малафеев О. А., Куницын В. В. **Идемпотентный анализ и дифференциальные игры** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 142–165.

Рассматриваются дифференциальные игры конечной и бесконечной продолжительности. Доказывается существование ситуаций равновесия. Библиогр. 3 назв.

УДК 579.67

Меньшиков Г.Г. **Аналитические основы локализующих вычислений** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 165–182.

Описываются основные математические идеи, лежащие в основе вычислений, осуществляющих интервальную локализацию искомого объекта. Ил. 3. Библиогр. 13 назв.

УДК 519.853

Михеев С. Е. **Эффективность релаксационного ускорения** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 183–197.

Исследовалась эффективность итеративных методов, когда они имеют зависимую от случайного параметра текущую оценку погрешности, в приложении к методу простой итерации и его ускорительной модификации. Были получены формулы для математического ожидания оценок текущих погрешностей модификации. Вычисления согласно им показали высокую эффективность модификации. Доказано, что дисперсия таких оценок быстро стремится к нулю на итерациях. Библиогр. 3 назв.

УДК 517.977:669.046

Морозкин Н. Д., Морозкин Ю. Н. **Итерационный метод решения задачи оптимального нелинейного нагрева с ограничениями на термонапряжения и на наибольшую температуру** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 198–217.

Исследуется нелинейная задача оптимального по быстродействию нагрева с учетом фазовых ограничений, таких как ограничения на сжимающие и растягивающие термонапряжения и на наибольшую температуру. Учитывается нелинейная зависимость коэффициента теплопроводности и прочностных характеристик от температуры. Предложен итерационный процесс, основанный на последовательной линеаризации исходной нелинейной задачи. На каждой итерации полученная линейная задача аппроксимируется конечномерной задачей оптимального управления, которая решается с использованием многошагового двойственного алгоритма Н.Е. Кирина. Выписаны априорные оценки погрешности аппроксимации и доказаны теоремы о сходимости конечномерных приближений по состоянию. Доказана слабая сходимость последовательности управлений решения конечномерных задач к множеству оптимальных управлений. Приведены результаты вычислительных экспериментов. Библиогр. 9 назв. Табл. 1.

УДК 519.673

Мысовских В.И. **О системах компьютерной алгебры** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 217–223.

Кратко рассмотрена архитектура и принципы построения систем для символьных вычислений. Упомянута классификация этих систем, указаны наиболее популярные и мощные системы. Приведены основные типы задач, решаемых при помощи универсальных пакетов компьютерной алгебры. Библиогр. 8 назв.

УДК 519.62 /.642

Олемской И.В. **Алгоритм выделения структурных особенностей** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 224–251.

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений предложен алгоритм выделения структурных особенностей определенного вида. В его основе лежит хорошо известный метод ветвей и границ. Использование полученного алгоритма решает задачу унификации и повышает эффективность структурного метода численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Библиогр. 1 назв.

УДК 623.466.5

Остов Ю.Я., Иванов А.П. **Управление летательным аппаратом по оценочной модели** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 251–264.

В статье рассматривается задача синтеза субоптимального управления движением центра масс летательного аппарата. В основу методики синтеза управления движением летательного аппарата положен принцип расширения, приводящий к линейному неоднородному уравнению в частных производных, интегралы уравнения характеристик которого использованы для решения поставленной задачи. Эффективность предложенной методики подтверждается результатами численного моделирования. Библиогр. 8 назв.

УДК 517.91+519.2

Приставко В.Т., Куриленок А.Ю. **Оптимальное управление линейным матричным объектом** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 265–274.

В статье рассматривается задача оптимального управления дискретным матричным объектом, динамика которого описывается линейным матричным уравнением вида

$$X_{t+1} = A(t)X_t + B(t)u_t + F(t), \tag{1}$$

с N - заданным конечным моментом времени N; где матрица фазовых координат X_t $(n \times r)$; u_t матрица управления $(m \times r)$, $A(t),\ B(t),\ F(t)$ матрицы соответствующих размерностей, элементы которых суть известные вещественнозначные функции скалярного аргумента t, определенные для каждого $t = \overline{0,\ N-1}$. Начальное положение X_0 задано. Ограничения на управление не накладываются. Решение задачи проводится посредством метода динамического программирования Р. Беллмана.

Результаты исследований данной задачи применяются при рассмотрении объектов более общего вида

$$X_{t+1} = A_1(t)X_t + X_tA_2(t) + B_1(t)u_1(t) + u_2(t)B_2(t), \tag{2}$$

Управления $u_1(t),\ u_2(t)$ определяются в классе линейных функций, оптимальных в квадратичном смысле. Преимущества систем вида (2) заключается в том, что они описывают не только одновременное движение множества векторных объектов, но и влияние их друг на друга. К объектам данного типа приводят задачи управления пучком электронов, описания прямого и обратного транспорта крови сердечно-сосудистой системы живого организма, анализа динамики налоговой базы региона и т.д. Библиогр. 4 назв.

УДК 512.622

Хитров Г.М. **Об одном обощении теоремы Виета о корнях** // Николай Ефимович Кирин. Сб. статей под редакцией В.В. Жука и В.Ф. Кузютина. — СПб., Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. С. 274–277.

В статье дано выражение однородного симметрического многочлена от n переменных k-го порядка с единичными коэффициентами через определитель матрицы специального вида, элементами которой являются элементарные симметрические многочлены от n переменных. Если рассматривать указанный многочлен k-го порядка как многочлен от набора корней многочлена n-ой степени от одной переменной, то значение этого многочлена k-го порядка на указанном наборе корней многочлена n-ой степени будет выражаться через определитель от коэффициентов многочлена n-ой степени. Последнее соображение и послужило основанием тому, что статья озаглавлена “Об одном обобщении теоремы Виета о корнях”. Библиогр. 2 назв.

РАЗДЕЛ IV

ВОСПОМИНАНИЯ

ВОСПОМИНАНИЯ РОДНЫХ И БЛИЗКИХ

Клавдия Павловна Кирина, мать

О МОЕМ СЫНЕ

Мой старший сын Коля родился в семье сельских учителей 21 декабря 1939 года в с. Лешуконское Архангельской обл. Он рос очень смышленым ребёнком. Играя с ровесниками, был таким же, как они, встречаясь со взрослыми, даже незнакомыми, разговаривал на равных. Этим восхищал и удивлял старших.

Когда исполнилось ему 4,5 года, семья переехала на житье в Вологду. Здесь и прошли его школьные годы. Учился всегда на отлично, но очень стеснялся, когда классный руководитель на собрании хвалила его и просил не называть его фамилию: “Я не лучше всех”. А вот каллиграфия у него была безобразная, правда, за это его не бранили учителя. Как - то в разговоре учитель математики сказала, что у Коли изложение на бумаге не успевает за мыслями, и он спешит.

Среднюю школу окончил с Золотой медалью. Поступил в Ленинградский университет, но мечтал о режиссерской деятельности.

В школе активно участвовал в художественной самодеятельности, особенно удавалось художественное чтение. Много уделял сил и времени неуспевающим одноклассникам. Когда Коля заканчивал школу, даже малыши - первоклашки забеспокоились: “Как мы теперь будем без него!?” Так он был популярен в школе.

Обо мне тоже всегда помнил, приезжая на каникулы, привозил подарки, отрывая от своей стипендии. Любил бывать в деревне, дружил с местными жителями.

Клавдия Павловна Кирина, мать

СТИХИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ МОЕМУ СЫНУ

* * *

Счастливых дней тебе желаем,
Удачных тоже всех подряд,
Здоровья крепкого в достатке,
Что краше всех других наград!

Чтоб тебе всегда светила
Улыбка преданных друзей
И радость в жизни приносила
Забота о семье своей.

К.П. Н.Е.

* * *

Дитятко желанное,
С праздником тебя!
Пусть он длится дольше
И радует меня.

К.П. Н.Е.

* * *

Промчались годы школьные -
Похвальные листы,
С медалью золотою
В путь направлен ты.

Мы с тобою вместе
Отметим юбилей,
Грядущий век пусть будет
Залогом светлых дней.

А вёрсты полосаты
Нас не разлучат,
На остров на Васильевский
“Быстрее всех домчат”.

Жизнь твоя в зените славы,
Много света впереди,
Не сворачивай с дороги
Твёрдой поступью иди.

Подводить итоги рано,
Надо многое свершить,
Есть ещё в запасе силы,
Как бы их распределить.

Шестьдесят - совсем не старость,
Нужно долго - долго жить
И великим божим даром
Безупречно дорожить.

Ты - одно мое желание,
Ты - мне радость и страдание
Ты же явный свет в окне,
Что всего дороже мне.

21.12.99 *К.П. Н.Е.*

* * *

Арсенал мой опустел,
Рифмы не слагаются,
Значит автор надоел,
Перу не подчиняются.

Как - то надо собрать силы,
Сыну весточку послать.
Это был ребёнок милый,
Умел взрослых восхищать.

Когда минуло два года,
Патефон всегда крутил
И любую без ошибок
Сам пластинку находил.

Любил Козина напевы,
“Летят утки” заводил
И порой по - детски счастлив
Сам с собою говорил.

А соседка Талечка
Пацана любила очень,
Разрешала в своём доме
Делать всё, что он захочет.

Годы смутные настали,
Война горе принесла,
Всюду стоны раздавались,
Бедам не было числа.

С той поры событий много
В жизне нашей пронеслось
И людей добрейших тоже
Встретить в мире довелось.

Я кляну себя всечастно,
Не сумела оградить
От ошибок и несчастий,
Чтобы сыну легче жить.

Жизнь - серьёзная забава,
Её надо уважать
И достойными делами
В меру сил сопровождать.

Будь здоров и счастлив !
Помним, любим, ждём,
Чтобы ты почаще
Навещал наш дом.

К.П. Н.Е.

* * *

С днем рожденья, сын родной!
Приезжай ко мне домой.

Вместе спразднуем годину,
Дату круглую мою,
Я поведаю как сыну
Про житье-судьбу свою.

Круглых дат не так уж много
Остается впереди;
Это помнить может надо,-
Остальные позади.

В тридцать семь моих когда-то
Было сердцу веселей,
Гомон, шум, ребячий лепет -
Вот отрада прежних дней.

Встреча прошлое напомнит...

К.П. Н.Е.

Борис Ефимович Кирин, брат

БРАТ

В школьные годы все три брата активно участвовали в общественной жизни школы и каждый год занимали какие - то выборные должности, начиная от звеньевого в классе и заканчивая комсомольским секретарем школы. Особенно запомнилось участие в художественной самодеятельности, руководителем которой была Флора Самойловна Немировская. Коля как - то сказал: “Пойдем к Флоре Самойловне, тебе понравится”. Два раза в неделю она проводила репетиции у себя дома. Большая комната в двухэтажном деревянном доме, пианино, старые фотографии на стенах. Флора Самойловна была профессионалом. Сначала каждое слово в художественном тексте подчеркивала условным знаком, расставляла акценты, отмечала интонацию в предложении, паузы и т.д. Все это надо было точно выучить. Занимались прозой, стихами, ставили пьесы. Мой старший брат, может быть и не осознавая этого, сыграл большую роль в моем развитии и я, будучи в девятом классе, участвовал в городских конкурсах художественной самодеятельности.

А летом - пионерский лагерь. Коля каждый раз организовывал “тайное общество”. Ростом он был меньше сверстников, но был шустрый и подвижный. Помню был тайник в двух километрах от лагеря, в лесу, на высокой ели. Каждый член “общества” после обеда половину десерта – две подушечки – оставлял в тайнике. И хотя часто находился предатель, который съедал все конфеты, всё равно было интересно.

Коля заботился обо мне, как о младшем брате. Как - то раз в лесу я сильно поранил ногу, лежал в комнате пионерской вожатой, из столовой приносили еду. А когда в конце смены был прощальный костер, Колины друзья поочередно несли меня два километра на руках. Он всегда был душой компании.

После школы на протяжении всей жизни я часто бывал в Ленинграде и в командировках, и просто так. Естественно, приезжал к Коле и становился членом семьи. Помню, как - то выступал в политехническом институте на семинаре. Подошел ко мне профессор Троицкий и спросил: “Вы кем приходитесь Н.Е. Кирину?” Я сказал. “Да, лучшего консультанта Вам не найти”. Конечно, в этом смысле мне повезло. Коля сыграл решающую роль в моей заочной учебе в аспирантуре, которая закончилась защитой кандидатской диссертации.

Коля очень любил деревню, родину нашей матери, где все мы каждое лето бывали у бабушки. Деревенские жители считали нас за своих. Его постоянно тянуло туда и, когда мать была уже в пожилом возрасте и дом в деревне стоял пустой, Коля и мама переписывались целый год, обсуждая двух – трех недельную поездку летом в родные места.

Николай Ефимович был честный, добрый, порядочный человек и дай бог каждому иметь такого брата.

Сергей Ефимович Кирин, брат

ОКНА

Летом мы бывали у бабушки в деревне под Вологдой. Это были 50-е годы. Там ещё не было радио, электричества, зато были соломенные крыши, протекавшие в самых непредсказуемых местах. При сильном дожде в соответственно спроектированных точках ставилась разнообразная посуда. Вечером зажигали керосиновую лампу с 10 - линейным стеклом. Но ещё до неё, помнится, в конце сороковых была и лучина. Просто сказка.

Засыпали не сразу. Сказки, страшные истории о попрыгунчиках, разбойниках, людоедах (теперь видно, что это были отзвуки реальных событий). Здесь Коля был неистощим и, насколько помнится, он выдавал не только фабулу, очень детализированную, но и весьма успешно “давил на психику” - здесь, видимо, проявлялись его прирожденные задатки к художественному творчеству. Впрочем, надо сделать оговорку в этом месте, отметив маленькую деталь - мама часто цитировала “Евгения Онегина”.

Лес, ягоды, грибы, ловля решетом рыбёшек, лазание по овинам, амбарам, - этот ассортимент при Коле значительно расширялся, спектр смещался в интеллектуальную сторону. Деревенские пацаны, которые постоянно спрашивали : “Когда Колька приедет?”, - с удовольствием занимались литературными играми, ребусами, шарадами и т.д.; он мог придумывать сколько угодно.

Надо ли говорить, что, например, для меня это было еще одно окно в мир, быть может, самое главное в ту пору.

Родители наши - педагоги. Оба - математики. Папа - определенно, а насчет мамы есть некоторые сомнения, она нередко, потеряв бдительность, сбивалась в сторону иноверцев - гуманитариев, хотя в основном система ценностей в семье была ориентирована в направлении интеграла Фурье и квазиабелевой функции. Официально и по умолчанию предполагалось, что постижение законов Хаммурапи и герменевтики Гадамера - что-то из области коллекционирования марок.

Но не все было так просто. Коля отвел меня в первый класс, мы стали учиться в одной школе. Его авторитет там я понял несколько позже. Его детищем была так называемая светогазета. Бумажная лента с рисунками и стихами с помощью “волшебного фонаря” подавалась на экран. Это была жизнь школы через призму редакции - читай его. Здесь был не только юмор, много юмора, но и схватывание типажей, образная подача материала, не злая сатира. Рисовал делал тексты в основном он. Газета шла на общешкольных собраниях и она была гвоздём программы. Все ждали, когда закончится официальная часть. Зал гудел и хохотал при просмотре.

Думаю, по крайней мере процентов на 60, он был гуманитарий. Стихи, драмкружок, прекрасные сочинения по литературе, бессменное редакторство и т.д., - это все вместе было, пожалуй, главным вектором, Коля даже подумывал стать кинорежиссёром. Неисповедимы пути Господни, но в любом случае его талант сделал бы свое дело, что и показала жизнь .

Наталья Ефимовна Хомякова (Кирина), сестра

ДЕТСТВО И ЮНОСТЬ

Прежде, чем говорить о моем брате, было бы справедливо сказать несколько слов о наших родителях, Клавдии Павловне и Ефиме Яковлевиче.

Мама родилась в 1915 году в деревне с красивым названием Константиново в 60 км от г. Вологды. Её отец, крестьянин, участник Первой мировой войны, умер от тяжёлой болезни 34 - х лет от роду (1924 г.), оставив четырех малолетних дочерей.

Закончив четыре класса бывшей церковно - приходской школы, мама продолжала упорно учиться благодаря поддержке своего любимого дяди Полиевкта. Домой приезжала, а чаще приходила, только на каникулы, преодолевая расстояния в семь, а затем в 30 км. Педтехникум находился в уездном г. Грязовце.

Родина отца - глухая деревенька Чучепала ("чуть пала") Архангельской губернии на большой северной реке Мезени, в которой, среди прочих, водилась сёмга, о чем отец всю жизнь вспоминал. Наш дед Яков, оставив старшую дочь и сына, 18 дней от роду, подался на заработки в Архангельск, где и умер в 1918 г. от свирепствовавшей в ту зиму испанки.

Наши родители встретились в учительском институте города Вологды, по окончании которого работали в школе села Лешуконское Архангельской области. Там и родились старшие сыновья Николай и Борис.

В конце 1945 г. семья поселилась в Вологде, отец стал преподавателем Вологодского пединститута, защитил впоследствии кандидатскую диссертацию, а мама преподавала в школе, но ей пришлось оставить работу: четверо детей нуждались в заботе.

Среди прочего наших родителей объединяла огромная тяга к знаниям: оба - дети полуграмотных крестьян, выросшие без отцов, часто голодные, они, благодаря упорству и трудолюбию, получили высшее образование, подготовив надежную стартовую площадку для своих детей. Кстати сказать, в учебных заведениях того времени, как вспоминали родители, среди их преподавателей часто встречались высоко образованные, по - настоящему интеллигентные люди, которых в ту пору называли "из бывших".

По словам мамы, маленький Коля очень любил слушать патефон. Патефон купили ещё в Лешуконском. Коля надевал на голову конверт от пластинки, вставал коленками на табурет и подолгу заводил это чудо техники.

Последний год войны мама с детьми находилась у бабушки в деревне, там в январе 1945 г. родился третий сын Сергей. Уже через месяц она вернулась на работу преподавать математику и физику в сельской школе за семь километров от Константинова. Приходилось брать на уроки грудного ребёнка. Остальная компания находилась под присмотром бабушки.

В Вологде молодой семье дали крохотную комнатку в бывшей гостинице. Очень крутая железная лестница вела прямо с улицы на третий этаж. Вдоль длинного с поворотом коридора располагалось достаточно много комнат, там жили преподаватели пединститута и артисты театра.

Как - то по карточкам получили сахар. Пакет лежал в доступном месте. Мама обратила внимание на то, что Коля уже некоторое время ходит за ней по пятам. Спросила, что ему нужно. Он признался, что они с Борей взяли без разрешения по кусочку сахара и съели. Эту пропажу никто бы и не заметил, но содеянное терзало совесть.

Одно из моих ранних воспоминаний о Коле, пожалуй, связано с так называемым фильмоскопом. Это была картонная коробочка с вырезанным на дне прямоугольником, который обращался к зрителям. Немудрёный механизм из двух катушек позволял бумажной ленте перематываться с одной катушки на другую, представляя аудитории очередной кадр. Фильмы рисовал Коля, он же и демонстрировал, сопровождая комментариями. Значительно позднее у нас появился настоящий фильмоскоп, но тот, картонный, я долго хранила вместе с бумажными лентами, на которых были короли и принцессы. Мы все очень любили это кино.

Помню, были игральные карты, которые тоже рисовали, а потом усовершенствовали производство: вырезали деревянные штампы с бубнами, трефами и т.д., но папа, увидев наше изобретение, очень рассердился и порвал карты.

Вторым адресом в Вологде было тоже общежитие пединститута. Трехэтажное деревянное здание на высоком берегу реки. Улица была вымощена булыжником и, когда проходила лошадь с телегой, грохот стоял невообразимый. Дом давно снесён, а деревья вокруг живы. Напротив - красивое здание госбанка, рядом - церковь, в которой был кинопрокат, сейчас это действующая церковь, в 100 метрах - Вологодский кремль и Софийский собор. Это - центр старого города. За кинопрокатом позднее построили трамплин спортивного общества "Урожай", напротив трамплина под горой были плоты, на которых полоскали белье, а рядом - перевоз: довольно большая лодка, может быть это была шлюпка, вмещавшая порядка 20 человек, на которой одноногий перевозчик за 20 дореформенных копеек доставлял на другой берег. Помню, как экономно он управлял лодкой, делая небольшие взмахи вёслами. За перевозом вдоль берега проходит Соборная горка - небольшой скверик почти напротив Софийского собора, одного из красивейших в России. В 1990 г. вид на Софийский собор со стороны Соборной горки попал в настенный календарь нашей страны. Это и была среда нашего обитания. В Вологде на каждом шагу церкви, некоторые сейчас вновь открыты, много мест, связанных с историческими личностями: тут - Домик Петра Первого, там - собор, во время строительства которого с крыши упал кирпич, чуть не убив Ивана Грозного, и разгневанный правитель спешно покинул Вологду, отказавшись от мысли сделать ее столицей. Но это другой рассказ.

В общежитии жили студенты и преподаватели. Мы занимали две смежные комнаты метров по 11; на общей кухне - 12 хозяек. Жили очень дружно: никогда никаких склок, присущих коммунальным квартирам, не было. То же могу сказать и о родителях: за 52 года совместной жизни между ними не было ни одного скандала.

Во второй комнате стоял огромный письменный стол, рядом - стеллаж с книгами. Это было рабочее место отца. Отец был не очень здоровым человеком и днём ложился отдыхать. Часто дверь во вторую комнату была закрыта: “Папа отдыхает” или “Папа занимается”, и мы разговаривали шепотом и ходили на цыпочках.

В нашей семье были простые и добрые отношения без излишней строгости к детям.

Финансово жили тяжело, окружающие удивлялись, как маме удается сводить концы: одна зарплата на шестерых. Она никогда не брала в долг: “А зачем? Что я отдавать буду ?” Конечно, садили картошку, в поле за 5 км. Добирались туда пешком. Накануне выпускного сочинения как раз надо было идти на огород. Погода стояла очень холодная, но никому и в голову не пришло оставить Колю дома. Вспоминая этот эпизод спустя годы, мама сетовала: “Мог бы и простудиться. Зачем было рисковать перед ответственным экзаменом ?” Коля учился очень хорошо, он всегда был отличником и дома хранилось большое количество похвальных грамот за успехи в учебе и общественную работу. Как - то в десятом классе он оказался единственным отличником и просил классного руководителя не называть его фамилию на собрании: “Другие ребята тоже хорошо учатся”. Действительно, были в классе способные ученики, например, один из них, Володя Бурков, закончил физтех в Долгопрудном, впоследствии стал академиком РАН, но Колины успехи учителя оценивали очень высоко. Он был чрезвычайно застенчив и скромен. Мы все очень гордились его Золотой медалью за среднюю школу, по тем временам это была большая редкость.

Когда Коля закончил десятый класс, я закончила первый. И с тех пор мы его всегда ждали, сначала - на каникулы, а затем - в отпуск. Всегда ждали его интересные письма, часто ироничные. Коля любил приезжать неожиданно. Это было радостным событием для всех. Мама непременно пекла пироги. Коля очень любил их, особенно с капустой. Начинались всякие разговоры. Подолгу беседовал с папой о математике. Я ненавидела эти математические беседы. Находясь рядом и абсолютно ничего не понимая, напряженно ждала, когда же, наконец, начнут говорить человеческим языком.

Стать математиком Коле посоветовал папа. А мечтал он снимать кино. Но это казалось отцу несерьёзным делом, и он убедил сына идти в науку.

Коля любил приезжать в родную Вологду, о которой у всех нас остались самые теплые воспоминания, и мы сожалеем, что расстались с этим городом. Заезжая позднее к двоюродной сестре, живущей в Вологде, Коля целыми днями бродил по старым улицам. Как - то сказал мне, что хорошо бы нам всем там собраться, а потом прислал карту Вологды - двухверстку - и интересовался, путешествую ли я по знакомым местам.

В школе старший брат активно участвовал в художественной самодеятельности: был ведущим на концертах, играл в спектаклях, читал прозу. Как - то читал Чехова, специально для этого отыскали у соседей настоящее пенсне. Бывало, что братья выступали втроем. Школьников приглашали выступать во время выборов. Когда однажды на таком концерте объявили Колин номер, к маме обернулась сидящая рядом женщина и заметила : "Сейчас будет выступать мальчик, он так хорошо читает !" Мама не сказала, что этот мальчик ее сын.

Душой художественной самодеятельности была удивительная женщина, профессиональный руководитель Флора Самойловна Немировская. Она очень любила Колю. В каждый свой приезд уже после окончания школы Коля и его друзья обязательно бывали в доме Немировских. В один из приездов на каникулы по предложению Флоры Самойловны Коля отвел меня к ней. Семья занимала две комнаты двухэтажного деревянного дома с резными украшениями. Здание стоит и по сей день (К.Цеткин, 22, 2 звонка). Подобные дома сейчас в Вологде благоустраиваются изнутри, но снаружи разрешается только реставрировать, так вологжане сохраняют неповторимый облик старой Вологды. Началось моё обучение игре на фортепьяно. Прослушав меня после нескольких месяцев занятий и обнаружив явные успехи, папа записался в очередь на пианино. В свободной продаже инструментов тогда не было. Спустя некоторое время занятия прекратились из - за моей безалаберности, но всю жизнь я с благодарностью вспоминаю Флору Самойловну за те первые уроки и возможность общения с этой удивительной женщиной.

Коля и деревня - это совершенно особая тема. Ещё совсем маленьким на вопрос на вопрос, кем хочешь стать, он уверенно отвечал: "Конюхом, - и вздохнув добавлял - или пастухом..." Он бесконечно любил деревню и все, что с ней связано. Каждое лето мы проводили под Вологдой у бабушки в д. Константиново. К бабушке Лизавете деревенские жители относились с уважением, ценили ее такт, порядочность.

Запомнились походы за малиной. Малины в тех краях очень много. Аромат этой ягоды мне милей всех прочих. Люди в Константиново и вокруг очень приветливые, если зайдешь в дом, обязательно угостят чаем и всем, что бог послал.

Чай у бабушки пили из медного самовара, был такой же поднос, ковш для воды и рукомойник. Все это к каждому празднику начищалось до блеска порошком из красного кирпича. Кирпич для этой надобности постоянно хранился в доме. Вода для чая - родниковая, из речки Малиновки, удивительно вкусная.

Мы очень любили, когда приходила бабушкина подруга Парасковья Денисовна. Это был настоящий самородок, кладезь народного юмора. Часто, когда она рассказывала о каком - то событии, мы покатывались со смеху.

Когда Коля учился в университете, в Константиново ещё не провели электричество и по вечерам зажигали керосиновую лампу. Иногда играли в карты. К тому времени даже бабушка достаточно раскрепостилась и соглашалась на это " бесовское "занятие. " Только вас потешить ", - говорила она с удовольствием подсаживаясь к столу. Было очень весело и легко, ничто не угнетало, много шутили и смеялись. Обсуждали текущие дела и вспоминали былое: например, раскулачивание, коллективизацию. Бабушкины родственники, среди них двоюродный брат, пострадали от раскулачивания. По словам старших выходило, что раскулачивали работящих крестьян, которые умело вели хозяйство, и совсем они не были какими - то кровопийцами и эксплуататорами. А к власти пришла беднота, зачастую ленивая и неумелая. К тому же сверху спускали разнарядки: раскулачить столько - то хозяйств. От всего этого безобразия брат деда Павла Полиевкт уехал подальше, чтобы его, как грамотного человека, не заставили выступать против своих односельчан.

Бабушка, да и окружающие, не была очень набожной, скорее так, для порядка: в праздники и по воскресеньям зажигала лампадку с деревянным маслом, по утрам и вечерам тихо молилась, стоя перед образами, но делала это незаметно, с утра пораньше, пока все спят, или вечером на кухне, когда там никого не было, как - будто она этого стеснялась.

Коля, как и другие братья, умел косить, управляться с лошадью, ездили в Константиново на заготовку дров: их надо было нарубить в лесу, привезти на лошади и разделать .

Когда бабушка умерла в 1968 г. в возрасте 80 лет, Коля горько плакал.

Деревенские жители относились к нам очень хорошо, но Коля, как мне кажется, был на особом счету. Наверно и за преданность деревне. У многих сохранились его снимки на память. Фотографировал и старых, и малых, некоторые снимки весьма художественны (потрет дяди Коли). Когда в деревне уже не осталось родственников, да и из жителей - только пенсионеры в трех - четырех домах, мама и Коля с удивительным постоянством старались приехать хоть на пару недель подышать родным воздухом, попить такого вкусного, ни с чем не сравнимого молока, насладиться тишиной, как - будто нуждаясь в подзарядке. Там и впрямь дышится удивительно легко и глаза отдыхают на незатейливых северных, но таких милых сердцу пейзажах.

Последний раз я привезла маму в Константиново в тридцатиградусную июльскую жару 1999 года, а Коля подъехал из Ленинграда спустя пару дней. Вскоре мне надо было уезжать и брат пошел провожать меня на станцию Лежу, в восьми км. Шел проливной дождь. Мы рассчитывали на попутный транспорт, но его, как на зло, не оказалось, пришлось торопиться. Пришли почти к прибытию поезда. Наскоро простившись, я зашла в вагон и направилась искать свободное место. Вдруг спохватилась, что не сказала Коле что - то важное, как - то сердце сжалось. Выбежала на площадку, окликнула. Он уже поравнялся с углом старого здания вокзала, оглянулся, помахал мне рукой и пошел в дождь, в прозрачном китайском плаще - мешке, в котором ему было невыносимо душно.

Больше мы не встречались.

Всю зиму переписывались, собираясь в следующее лето как следует пожить в Константиново, но увы, нашим планам не суждено было осуществиться.

Когда отец серьезно заболел, Коля при первой возможности приехал в Киров и весь отпуск ухаживал за тяжелым больным. После смерти папы он очень трогательно заботился о маме, помогал, как мог. Слово мамы было для него свято.

Кем был для меня Коля? Всегда старшим братом, которым я бесконечно гордилась и любила. Гордилась его несомненными успехами и очень переживала, если не все было в порядке. В последние годы разница в возрасте сгладилась, мы переписывались. Каждое его письмо было радостью. С Колей я могла и хотела обсуждать любой вопрос и абсолютно доверяла его мнению.

Мне думается, в нашей семье это был самый совестливый человек и свои поступки невольно сравниваешь с его позицией. Сказать, что мне сейчас не хватает брата, слишком мало сказать

Нина Ивановна Кирина, жена

ЭТО БЫЛ СВЕТЛЫЙ, СОЛНЕЧНЫЙ ЧЕЛОВЕК

Это было прекрасное время - студенческая целина 1961 года. В памяти осталась такая картина. Безбрежное степь, палящее солнце и лошадь, убегающая вдаль, за которой бежит человек, пытаясь её догнать. Это был Коля. Расстояние между ними всё увеличивалось, и безнадёжная попытка догнать её в этот раз не увенчалась успехом...

С 1963 года я, студентка 2 курса, “подрабатывала” на пол - ставки в ВЦ ЛГУ, руководил моей работой аспирант 1 курса мат -меха Кирин Коля, вот тогда я узнала его ближе. Постепенно у нас сложились дружеские отношения. Мы бродили по Ленинграду, ходили в кино, ездили за город, частенько наезжали к Кирпичниковым, которые проживали в посёлке Рощино. Коля пригласил меня поехать с ним в деревню к его бабушке Антипиной Елизавете Андреевне, а также посмотреть Вологду, где жили его родные. Деревня встретила чистым снегом, вологодским говором, соседями. Это путешествие в зимнюю сказку мы вспоминали с большим удовольствием всю жизнь.

Новый год встретили в старинном русском городе Вологде с его деревянными домами, с резными наличниками и крылечками, с его Кремлём, рядом с которым жила семья Кириных: мать - Клавдия Павловна, отец - Ефим Яковлевич, братья Борис и Сергей, сестра Наталья. Семья жила в стеснённых условиях, студенческом общежитии. Здесь прошли детские, юношеские годы Коли, здесь он окончил школу с золотой медалью, отсюда поехал поступать на математико - механический факультет ЛГУ.

За время нашего общения у Коли обнаружились замечательные человеческие черты. Это был добрый, мягкий, искренний, честный, отзывчивый человек, таким он и оставался всегда. Как - то незаметно появилась необходимость постоянного общения и присутствия друг друга, и мы приняли решение создать семью. Так как Коля не был жителем города, ему по ходатайству университета было разрешено принять участие в строительстве кооперативной квартиры. Так мы стали полноправными жителями города. Двери нашего дома всегда были открыты для многочисленных родных и "своих" - дальних родственников, которые "находили" нас и с каким - то постоянством бывали у нас круглогодично, для друзей, для знакомых и не очень знакомых. В любое время суток к нам можно было прийти в любом составе и количестве. Всем были рады, все накормлены, обласканы, "развлечены". К нам частенько захаживали Хоменюк В.В. с родными, Трухаев Р.И., бывали Кирпичниковы Т.П. и Б.К., Жуки Н.С. и В.В., Кузютин В.Ф., сотрудники лаборатории, сокурсники, Фомины Н.А. и В.Н. Устраивали посиделки с застольями, преферансом, просматриванием любительских фильмов. В шутливом стишке Б.К. Кирпичников отобразил наши встречи такими словами:

Вы у Кириных бывали?
Так как я бывал едва ли
Здесь я ел и спал, и пил
Дом родной мне был не мил.
Всё здесь есть, но только танцев
Нет у этих у ...

У Коли были две страсти: математика и кино. Он снимал любительской кинокамерой. Домашняя кинотека сохранила немало кадров о семье, факультете, путешествиях, субботниках, семинарах, лекциях, учёных советов, днях факультета и пр. Многих уже нет с нами: Р.И. Трухаева, В.В. Хоменюка, Е.П. Чурова, В.С. Антончика, В.И. Зубова, но они остались живыми в кинокадрах, в нашей памяти. Во всех фильмах звучит голос Коли. Я занималась фанатично фотографией, и таким образом у нас создавался кино - фото архив, который отражает жизнь за почти 40 лет.

Коля был инициатором проведения математической школы в пос. Сиверский в 1969 году. Организационный комитет “снял” дом, завез столы, доски, кровати и всё необходимое для нормального проживания и началась работа. Каждый день утром и вечером молодые учёные делали доклады, проводились семинары. Участниками “школы” были Смирнов Е.Я., Левичев Ю.Е., Овсянников Д.А., Хоменюк В.В., Хитров Г.М., Голубева Л.С., Виноградова Т.К., Вязовик А.П., Кирин Н.Е., Кирина Н.И. С докладами выступили Петухов В.Р., Зубов В.И., который, как всегда поставил “мировые задачи”. Работа “школы” завершилась походом в деревню Ширинка Лужского района, где летом проживала семья Зубовых. И последнюю точку поставил лодочный поход по маршруту Толмачёво - Луга - Вревка - озеро Череменецкое.

Коля любил поездки и путешествия. Он побывал во многих местах Советского Союза. Однажды мы совершили поездку по северным старинным городам: Кириллово, Феропонтово, Белозёрск и др. Мы выехали из Вологды на пароходе по узкой речушке, края которой почти касались краёв судна, и закончили путешествие по Белому озеру с полузатопленными церквями. В другой раз проехались по “ Литературным местам России”. Поездки по Средней Азии, Кавказу, Крыму, Северу, Дальнему Востоку, Сахалину и т. д. - всё радовало и восхищало его. Часто вспоминал красоты Кубы. Но любым путешествиям предпочитал поездки в деревню, сбор грибов и ягод и просто прогулки по лесу. Почти каждое лето ездил со своими родными на родину своих предков. Дорожил прошлым, хранил память об ушедших.

В 1981 году мы приобрели дом на Мстинском Мосту Новгородской области и с тех пор часто проводили там время. Коля любил топить печи, топил баню и с удовольствием парился в ней. Несколько позже там же “поселились” Фомины, которые почти каждый вечер приходили на “последние известия”, преферанс и чаепития. Эти вечера с замечательными соседями доставляли много прятных часов общения. Умеренно занимался огородничеством и садоводством, с большим удовольствием сенокосом. В жизни был непритязателен, непривередлив, неприхотлив ни в еде, ни в одежде, ни в быту, но с удовольствием пользовался всеми удобствами. Ценил дружбу и был бесконечно благодарен за доброе отношение к себе.

Коля был добрейшим человеком, никогда не отказывал никому ни в какой просьбе. Общался с со многими людьми, проявляя уважение и внимание, сопереживая, стремился помочь каждому. Ему были интересны судьбы любых людей, будь то учёные или бродяги. Мог часами выслушивать рассказы о жизни совершенно посторонних людей. Все достойны внимания, всем должно быть место в этом мире и достойная жизнь.

В научном плане безотказно помогал всем, кто обращался за помощью, консультацией, с любым вопросом. Давал советы, делился научными идеями. У нас часто бывали студенты, аспиранты, сотрудники. Со всеми он внимательно и добросовестно занимался. Занятиям, как правило, предшествовал обед, а завершались они чаепитием. Знания Николая Ефимовича были глубокими и разносторонними, практически на любой вопрос можно было получить полный достоверный ответ.

Нелепая смерть настигла его в самую пору научного расцвета, зрелости. Многие идеи не получили завершения. После него остались сыновья Дмитрий и Алексей, внучка Сашенька, к которой он относился очень трогательно, внук Владислав, которого ему не пришлось узнать, его ученики, его труды.

Это был светлый, солнечный человек. Он радовался жизни, радовался приходу каждой весны, восхищался самим фактом жизни.

З. Ф. Попова, соседка

СОСЕДСКИЙ МАЛЬЧИК

Не верится, что так рано ушёл из жизни Николай Ефимович Кирин, прекрасный ученый и замечательный человек.

Вологда, 60-е годы, вологодский педагогический институт. Студенческое общежитие института. Вот здесь жила семья преподавателя института (кандидата физико-математических наук), Е.Я. Кирина. У Ефима Яковлевича и Клавдии Павловны было трое сыновей и дочь. Старший из них – Коля - это среднего роста мальчик с умными глазами и довольно симпатичным румяным личиком. Мой сын учился в одном классе с братом Коли, а их отца работали на одном факультете, поэтому мы хорошо знали друг друга.

Среди детей Коля отличался серьёзностью и почти недетской ответственностью, был организатор игр (футбол, казаки-разбойники). Они любили исследовать территорию Вологодского Кремля, находившегося рядом с общежитием. Помогал ребятам - соседям в решении трудных задач, упражнений, чертежей. Наши дети вместе ходили в театр юного зрителя на постановки, новогодние ёлки и т.д. В мужской средней школе №9 он учился только на “5", закончив её с золотой медалью. В старших классах его всегда избирали старостой, комсоргом или председателем учкома. Я это знала, потому что была членом родительского комитета школы.

Был внимательным, добрым юношей. К нам, старшим, относился с уважением и почтением.

Мне приятно, что я знала Колю, и какое-то время наша семья жила по соседству с семьей Кириных. Такие люди, как Николай Ефимович, являются лучами света, носителями знаний, примером для подражания.

ВОСПОМИНАНИЯ ДРУЗЕЙ И УЧЕНИКОВ

В.Ф. Кузютин

СМОЛЕНСКОЕ КЛАДБИЩЕ – РАДОСТЬ И ПЕЧАЛЬ НАША

Памяти друга

9 июля 1957 г. декан математико-механического факультета Ленинградского государственного университета профессор Николай Николаевич Поляхов проводил собеседование с абитуриентами - выпускниками школ, получивших золотые медали. В этот вечер (собеседование проводилось с 18 часов) я и познакомился с Колей и его отцом Ефимом Яковлевичем - преподавателем математики Вологодского пединститута. В последствии Ефим Яковлевич учился в аспирантуре в Ленинграде и защитил диссертацию у академика В.В. Новожилова.

Николай Николаевич сам лично беседовал и давал рекомендации к зачислению на математико-механический факультет. Среди прошедших собеседование и рекомендованных к зачислению оказался Коля.

В августе 1957 г. медалисты, рекомендованные к зачислению, уже работали на сенокосе в бригаде “Путь Советов”, что на Карельском перешейке недалеко от поселка Мельниково. Ребята косили, девушки гребли сено. Коля на лошадке привозил нам обед - бидон с молоком и хлеб.

В сентябре 1957 г. снова работали в колхозе, теперь уже всем курсом на уборке картошки в окрестности всё того же поселка Мельниково. Нам с Колей были близки дела деревенские, а потому нам доверили работу на лошадях, собирали на поле наполненные ящики с картошкой и свозили её в гурты.

Здесь в Мельниково нам повезло - 4 октября 1957 г. вечером наблюдали полёт первого Советского Спутника. Здесь же на колхозных полях и сложился коллектив нашего курса на математико-механическом факультете ЛГУ приема 1957 г.

Большую группу на курсе составляли иногородние, приехавшие из других городов и деревень, которым предстояло жить в общежитии №8, на Детской 50. Тогда в 1957 году по тем временам это было прекрасное общежитие. Недалеко находилось Смоленское кладбище, на котором ранее был захоронен Л. Эйлер, прах которого позже был перенесён в некрополь Александро-Невской Лавры.

Во время весенних сессий, тайком прихватив общежитские одеяла, уходили на кладбище и устроившись между склепов, готовились к экзаменам и одновременно загорали.

Правдивы слова о том, что тот не был студентом, кто не жил в общежитии. Коля был душой нашего общежитского коллектива, в который входили Б. Кирпичников, В. Шмырев, В. Шулаков, А. Андрющенко, А. Бреусов, В. Жук, Ю. Федоров, Б. Федоров, В. Тимичев, П. Федоренков, В. Ходоровский, Н. Московская, А. Шмидт, Н. Сизова, Т. Войткевич, М. Мюллер, П. Менц, Кляус Бэр, Ф. Хюбнер, С. Ушакова, позднее на 4 курсе присоединился Л. Петросян.

Коля слушал лекции известных педагогов И.П. Натансона, Д.К. Фадеева, С.Г. Михлина, И.П. Мысовских, М.К. Гавурина, И.К. Даугавета. Практические занятия по математическому анализу у Коли вела прекрасный педагог, замечательный человек Т.К. Чепова, по высшей алгебре вёл занятия Ф.А. Иванов. У них учился Коля, им сдавал зачеты и экзамены. В зачетке у Коли были все пятерки.

Однажды во время белых ночей Коля был инициатором специфического развлечения. Вечером пригласили наших славных общежитских подруг на прогулку на кладбище, предварительно направив туда некоторых однокурсников, снабженных белыми простынями. Последние, в подходящий момент, выскочили из кустов внезапно, что вызвало бурную реакцию на неожиданную встречу.

По дороге на занятия ко второй паре 12 апреля 1961 г. мы четверокурсники общежитские, и Коля был с нами, шли через кладбище к факультету на 10 линии и вдруг услышали по громкоговорителю - Гагарин в Космосе. Это было в то время ошеломляющим событием. Вместо учебы побежали на Дворцовую площадь.

Так сложилось, что Коля учился на кафедре вычислительной математики. Он участвовал и прошел все этапы развития вычислительной техники на факультете: на первом курсе - выполнял расчеты на стареньком арифмометре “Феликс”, затем осваивал “Рейнметалл” и первую ЭВМ “Урал”. Кстати в 1992 г., будучи с Колей на выпускных защитах дипломов на космодроме “Байконур”, мы повстречались со старушкой “Урал” в местном музее космонавтики.

В 1962 г. Коля с отличием закончил математико-механический факультет ЛГУ, был оставлен в аспирантуре. Он досрочно в 1964 г., одним из первых выпускников приема 1957 г., защитил кандидатскую диссертацию “Один метод программной оптимизации в системах управления". В 1974 г. Николай защитил докторскую диссертацию “Итеративные методы оптимизации управляемых систем".

В 1969 г. при создании факультета ПМ-ПУ Коля, тогда совсем молодой доцент, был Ученым секретарем Учредительного Совета по созданию нового, первого в Союзе, факультета прикладной математики - процессов управления. Несколько позднее Коля был избран заведующим кафедрой численного анализа. Эта кафедра соответствовала его научным устремлениям. Тяжело переживал он, когда в силу разных обстоятельств эта кафедра была закрыта. Для Коли это была трагедия, с болью и горечью он говорил мне об этом позднее.

Коля был прекрасным профессором, блестяще читал лекции по математическому анализу и численным методам. С добротой и пониманием относился к студентам.

Его любимая учительница в школе в г. Вологде Флора Самойловна советовала ему стать кинорежиссером. После возвращения из-за границы в 1963 г. я привез первую любительскую кинокамеру “Кварц”. С тех пор Коля не расставался с кинокамерой, в последнее время уже снимал на современных кинокамерах. Коля оставил прекрасные фильмы о жизни лаборатории теории управляющих устройств и механизмов, о факультете, о своей матери Клавдии Павловне, о своей сестре Наталии и братьях Сергее и Борисе, о своей деревне Константиново Грязовецкого района Вологодской области, которая расположена недалеко от станции Лежа, о своей семье - жене Руденко Н.И. и сыновьях, также математиках Диме и Алеше. В декабре 1999 г. был снят фильм, посвященный юбилейной дате - шестидесятилетию Николая Ефимовича Кирина.

Нелепый случай - трагическая гибель Коли в расцвете творческого таланта.

На смоленском кладбище начались наши студенческие годы, на смоленском кладбище похоронен талантливый ученый, замечательный человек Коля Кирин.

Л. А. Петросян

ВМЕСТЕ НА ПМ-ПУ

Мы учились с Николаем Ефимовичем Кириным на одном курсе математико-механического факультета Ленинградского государственного университета (ЛГУ), который в то время почему-то носил имя А.А. Жданова. Однако я перевелся в ЛГУ в 1960 году на четвертый курс из Ереванского университета, поэтому круг моих близких друзей был весьма ограничен. К ним относились Владимир Васильевич Жук (ныне профессор факультета прикладной математики-процессов управления) и Анатолий Владимирович Яковлев (ныне заведующий кафедрой высшей алгебры математико-механичекого факультета). От них я и узнал о Н.Е. Кирине как об одном из наиболее сильных студентов нашего курса. В 1962 году меня и Н.Е. Кирина оставили в аспирантуре, но вплоть до 1965 года наши пути никак не пересекались. Я только узнал от Владимира Васильевича, что Николай Ефимович досрочно (за два года) защитил кандидатскую диссертацию. В июне 1965 года я также защитился и встал вопрос, что делать дальше.

Конечно, я мог возвратиться в Ереван, где у меня были хорошие условия жизни и перспектива работы в университете, однако я хотел посвятить себя теории дифференциальных игр, в которой стал работать одним из первых в стране. Для того чтобы плодотворно вести исследования и дальше в этой области математики никак нельзя было прерывать связи со специалистами, сосредоточенными в то время в Ленинграде, Москве и Свердловске. Мое желание остаться совпало с желанием руководства математико-механичекого факультета оставить меня после окончания аспирантуры на работе в ЛГУ. Однако одного желания было тогда явно недостаточно. Дело в том, что я уже был женат и имел дочь. Моя жена, Евгения Генриховна Петросян (Вигель), приехала на учебу из дальнего Абакана и также как и я не имела в Ленинграде постоянной прописки.

В это время в стране началась организация первых жилищно-строительных кооперативов. Один из таких кооперативов был организован в ЛГУ. Руководство университета предложило мне вступить в этот кооператив. Но для вступления в кооператив надо было быть постоянным жителем Ленинграда. Такое же предложение было сделано и Николаю Ефимовичу (его положение с точки зрения возможностей оставления на работу в Ленинграде совпадало с моим). Мы согласились. Тогда ректор К.Я. Кондратьев совершил беспрецедентный шаг - пошел на прием к председателю Ленгорисполкома В.Я. Исаеву и подписал у него разрешение (с. 307) на вступление Н.Е.Кирина и меня в кооператив без постоянной прописки в Ленинграде.

Для такого похода надо было подготовить массу документов, и на этом этапе мы с Колей впервые близко познакомились. Я понял, что имею дело с безусловно талантливым человеком. Оставшись в университете, мы работали в разных лабораториях Вычислительного центра ЛГУ и виделись очень редко. Однажды осенью 1967 года я случайно встретил Колю на десятой линии. Он рассказал об организации в ЛГУ новой кафедры теории управления и предложил перейти на эту кафедру в качестве доцента. Мне нравилась работа со студентами и я, не раздумывая долго, согласился. Потом была встреча с заведующим кафедрой Владимиром Ивановичем Зубовым и я окончательно убедился в правильности выбранного решения. С этого времени мы работали вместе на одной кафедре.

В 1969 году был организован факультет прикладной математики-процессов управления. Кафедра теории управления составила ядро нового факультета, а В.И. Зубов был назначен деканом. Методическая комиссия поручила Николаю Ефимовичу чтение курса математического анализа, мне было поручено чтение геометрии, а Владимиру Николаевичу Иголкину - чтение курса высшей алгебры. В 1971 году деканом факультета прикладной математики-процессов управления был назначен Николай Георгиевич Баринов. Это решение было для многих членов коллектива неожиданным. Николай Георгиевич был хорошим организатором, честным и правдивым человеком, а также умел ладить с начальством. В то же время он был доктором технических наук, не всегда правильно понимал традиции университетских взаимоотношений и конечно был далек от фундаментальных проблем прикладной математики. Поэтому ему было трудно завоевать авторитет и уважение среди сотрудников молодого факультета, многие из которых к тому времени уже приобрели всесоюзную и даже мировую известность. В 1973 году я защитил докторскую диссертацию, примерно в то же время защитил докторскую диссертацию и Н.Е. Кирин.

Ходатайство для вступления в жилищно-строительный кооператив без постоянной прописки в Ленинграде с положительной резолюцией председателя Ленгорисполкома В.Я. Исаева.

Факультетской партийной организацией в то время руководил профессор В.С. Новоселов. Виктор Сергеевич заботился о том, чтобы молодые, сильные ученые пополняли ряды партии. В 1972 году мы с Н.Е.Кириным одновременно вступили в КПСС.

К сожалению, развитие факультета шло не так как хотелось. Несмотря на огромные ресурсы, выделяемые государством на развитие прикладной математики, факультету доставались жалкие крохи. Руководство теряло авторитет среди сотрудников и студентов. Прошло пять лет с момента образования факультета а он все еще не имел избранного декана. Все это не могло не отразиться на обстановке в коллективе. Было ясно, что должен быть найден выход из создавшегося положения. В 1974 году весной состоялись выборы партийного бюро факультета. Его состав был существенно обновлен. Помимо В.С. Новоселова (секретарь партбюро), Н.Г. Баринова (и.о. декана факультета), Г.Н. Крылова (директор научно-исследовательского института вычислительной математики и процессов управления ЛГУ) в состав партбюро были избраны молодые коммунисты Н.Е. Кирин, В.Ф. Кузютин, В.С. Ермолин (заместитель секретаря по организационной работе) и Л.А. Петросян. В октябре 1974 года произошло заседание партбюро, которое можно считать судьбоносным для факультета, а может быть и для университета в целом. Обычно, повестка дня партийного бюро согласовывалась заранее с партийным комитетом ЛГУ, и наиболее острые вопросы вносились в повестку с одобрения партийного комитета университета. Разумеется, этот порядок никем никогда не регламентировался, однако исторический опыт работы партийной организации университета указывал на опасность отхода от существующего регламента. Как только заседание партбюро началось, Николай Ефимович предложил просить руководство ЛГУ в ближайшее время объявить выборы декана и рекомендовать на эту должность Владимира Ивановича Зубова. Н.Г. Баринов и Г.Н. Крылов попытались воспрепятствовать постановке такого вопроса на партбюро и предложили его не рассматривать. Оказалось два предложения, согласно уставу КПСС (на соответствующий пункт которого обратил внимание В.С. Ермолин), голосование должно было проходить по порядку поступления предложений. За предложение Н.Е. Кирина проголосовали четыре члена партбюро (Кирин, Кузютин, Ермолин, Петросян). На вопрос кто против Н.Г. Баринов и Г.Н. Крылов пытались поднять руки, однако их остановил В.С. Новоселов прошептавший - воздержимся. Таким образом, предложение Николая Ефимовича прошло (4-за, 3-воздержавшихся). На следующее утро В.С. Ермолин передал решение нашего партбюро в партийный комитет ЛГУ, и официально его зарегистрировал. Механизм выборов декана ПМ-ПУ был запущен. В начале ноября я был откомандирован в университет Ориенте города Сантьяго де Куба для чтения лекций и руководства аспирантами в области теории игр и исследования операций сроком на 6 месяцев. Телефонная связь с Ленинградом работала ненадежно и с факультета поступала противоречивая информация. В конце апреля я получил письмо от Николая Ефимовича, в котором он подробно рассказал о событиях происшедших на факультете за месяцы моего отсутствия. А произошло следующее. После долгих проволочек на апрель были назначены выборы декана, при этом руководство университета и партийного комитета ЛГУ делало попытки изменить кандидатуру на должность декана предложенную партийным бюро факультета. Однако этого сделать не удалось. Выборы состоялись в апреле. Обстановка на заседании ученого совета была накалена до предела. На совет оказывалось давление со стороны присутствующих на заседании руководителей ЛГУ. В результате тайного голосования оказалось, что В.И. Зубову не хватило одного голоса, чтобы стать деканом факультета. Фактически это означало раскол коллектива на два равных по возможностям противоборствующих лагеря. Очевидно, что в таких условиях и исполняющий обязанности декана факультета Н.Г. Баринов не мог руководить коллективом. В это же время состоялось партийное собрание коммунистов факультета, на котором меня заочно переизбрали в партбюро, а Николай Ефимович стал его секретарем. На него легла огромная ответственность восстановить моральный климат в коллективе и подготовить повторные выборы декана до наступления летних каникул. Фактически в это время Н.Е. Кирин был реальным руководителем факультета ПМ-ПУ.

2-го мая 1975 года я вылетел домой из Гаваны и уже 4-го утром открывал дверь своей квартиры на Железноводской улице. Я еще не успел переодеться и распаковать чемоданы как раздался телефонный звонок. Звонил Николай Ефимович, вкратце обрисовав обстановку на факультете он предложил мне участвовать в выборах на должность декана факультета. Я дал свое согласие. 18 июня на ПМ-ПУ повторно состоялись выборы декана и меня избрали на эту должность.

Нам с Николаем Ефимовичем тогда было 35 лет, и мы стали самыми молодыми руководителями самого молодого факультета университета. Здесь нельзя не сказать о том,что у факультета было немало противников честно считавших, что для подготовки специалистов в области прикладной математики, информатики и компьютеров незачем открывать новый факультет а можно вести такую подготовку силами старых факультетов. Среди них были и достаточно авторитетные ученые, но было и много партийно-управленческих функционеров получающих дивиденты от склок, интриг и пресмыкательства. Им казалось, что при молодых и слабых руководителях с легкостью удастся закрыть вновь созданный факультет и возвратить систему подготовки специалистов в области прикладной математики и информатики в старое русло. Однако новые задачи, которые ставил перед государством научно-технический прогресс, не позволили реализоваться этим отсталым воззрениям. Но путь отстаивания интересов факультета оказался долгим, тяжелым и иногда включал элементы трагизма.

Ситуация на факультете была сложной. Начиналась новая пятилетка, а это означало что научно-исследовательский институт вычислительной математики и процессов управления должен был быть обеспечен заказами на следующие пять лет, должны были быть переутверждены Советы по присуждению ученой степени кандидата и доктора наук, должен был быть переутвержден учебный план по специальности прикладная математика. Предыдущее руководство факультета ничего не сделало в этом направлении, имелись также и упущения в воспитательной работе студентов. Необходимо было предпринять решительные шаги по всем направлениям деятельности факультета. Мне очень повезло, что с Н.Е. Кириным мы понимали друг друга с полслова и практически не тратили времени на дебатирование принципиальных решений. Наиболее острой была ситуация с привлечением заказов в НИИ ВМиПУ. Директор НИИ ВМиПУ Г.Н. Крылов не только ничего не делал для получения портфеля заказов на следующую пятилетку, но до сих пор по неизвестным мне причинам всячески тормозил получение таких заказов. Тогда мы пошли на нестандартный и рискованный шаг. В последние дни июня В.И. Зубов (который пользовался большим авторитетом в оборонной промышленности) и я без оформления командировочных документов поехали на один день в Москву, где пройдя к руководителям ВПК, вписались в 26 научных тем в области прикладной математики исполняемых по специальным постановлениям правительства. Это был беспрецедентный поступок, хотя бы потому, что участие даже в одной такой теме требовало многомесячных согласований на уровне министерств и ведомств науки и высшего образования с одной стороны и оборонными министерствами с другой. Николай Ефимович знал об этой поездке, активно поддержал ее и обязался защищать нас в случае возможных репрессий со стороны ректората и парткома ЛГУ. С его стороны это был мужественный шаг, поскольку партийная дисциплина требовала чтобы он ставил в известность вышестоящие партийные органы о всех нестандартных шагах декана факультета. После прихода этих тем в университет секретарь парткома спросил меня, на каком основании без согласования с руководством ЛГУ, мы с В.И. Зубовым пошли на такие действия. Я ответил, что руководство ВПК спросило нас, может ли коллектив выполнить указанные работы, а поскольку я знал, что мы в состоянии их выполнить то ответил утвердительно, а отрицательный ответ в таких условиях мог рассматриваться и должен был рассматриваться как утаивание своих возможностей при выполнении оборонных заказов. Он ничего на это не мог возразить, но Н.Е. Кирин получил замечание за ослабление контроля за деятельностью администрации. Здесь надо отметить, что мы с Николаем Ефимовичем всегда выполняли и существенно перевыполняли полную учебную нагрузку, занимались активной научной работой, руководили аспирантами и докторантами. Благодаря этому мы пользовались авторитетом и у наших недоброжелателей. На обсуждение текущих вопросов оставалось всегда очень мало времени, поэтому практически каждый день мы вместе возвращались домой в моем автомобиле (Николай Ефимович жил рядом с нашим домом) и обсуждали текущие вопросы в машине. Довольно часто с нами ехал и В.Ф. Кузютин позже ставший заместителем декана факультета. Факультет находился под постоянным контролем, многочисленные комиссии ректората и парткома не давали покоя. В создавшихся условиях надо было укрепить все направления деятельности: от работы в колхозе до успеваемости и научной работы студентов, от порядка в общежитии до своевременной защиты кандидатских диссертаций, от качественного выполнения научных тем до оснащения вычислительного центра факультета вычислительной техникой. Мы с Николаем Ефимовичем решили заменить заместителя декана и директора НИИ ВМ и ПУ, которые по разным причинам уже не отвечали решаемым задачам. Заместителем декана был тогда Виктор Павлович Скитович - авторитетный ученый в области теории вероятностей. Вместе с Николаем Ефимовичем мы предложили ему написать заявление об уходе с должности заместителя декана. Он сразу согласился и на эту должность был назначен наш сокурсник Вячеслав Федотович Кузютин. Впоследствии Виктор Павлович защитил докторскую диссертацию и в полном согласии с нами работал на факультете. По иному обстояли дела с директором НИИ ВМ и ПУ Георгием Николаевичем Крыловым. Первоначально он согласился с нашим предложением уйти с поста директора и написал заявление об уходе, которое я в тот же день передал С.И. Катькалло в отдел кадров ЛГУ. Однако на следующий день он явился в отдел кадров и попытался взять заявление обратно. Мудрый Сергей Иванович заявление не возвратил, но не стал форсировать приказ об освобождении от должности. Это усложнило обстановку на факультете. Вопрос с директором удалось решить лишь спустя несколько лет при этом, как ни странно сыграло роль заявление, написанное вначале и оставшееся в отделе кадров.

Утверждение нового учебного плана было первостепенной задачей. Продвижение новой специальности прикладная математика встречало сопротивление не только в ЛГУ, поэтому разработка и утверждение учебных планов по этой специальности было возложено на независимый орган - учебно-методическое управление (УМО), которое напрямую подчинялось министру Высшего и специального образования СССР. Председателем УМО был академик Андрей Николаевич Тихонов - декан родственного факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета. Я позвонил домой Андрею Николаевичу, и мы договорились о встрече. В Москву мы поехали вместе с Николаем Ефимовичем, имея в руках готовый к подписанию учебный план по специальности прикладная математика. Одновременно мы имели составы двух Советов по присуждению кандидата наук и двух Советов по присуждению ученой степени доктора наук. В 9 утра мы уже были у Андрея Николаевича. Он в нашем присутствии позвонил министру и попросил немедленно подписать учебный план и организовал встречу с ответственными руководителями ВАК СССР для согласования составов диссертационных Советов с целью их дальнейшего утверждения. В результате за один день все вопросы были успешно решены. Мне кажется, что Андрею Николаевичу как крупному ученому и руководителю науки импонировала энергия и независимость молодых руководителей факультета ПМ-ПУ. Он также отметил как положительный момент единство взглядов по всем вопросам развития факультета у его декана и секретаря партийной организации. В результате решительных организационных мероприятий выполненных нами вместе с Николаем Ефимовичем, в конце 1975 года факультет встал на нормальный путь развития и казалось что все уже зависит от работы его коллектива. А она была поистине самоотверженной. Возникло поразительное единство взглядов профессорско-преподавательского состава, сотрудников, аспирантов и студентов в вопросе о необходимости максимальной мобилизации усилий с целью постоянного повышения качества учебного процесса и научных исследований на факультете. Благодаря усилиям в первую очередь партийной организации, которой и руководил Николай Ефимович, за короткий срок удалось полностью преодолеть тот раскол, который произошел в коллективе в результате апрельских событий 1975 года. Факультет стал динамично развиваться. Был организован вычислительный центр, который по уровню своей работы и интеграции в учебный процесс не имел равных в университете, активно пополнялись фонды факультетской библиотеки, заработали Советы по присуждению степени кандидата и доктора наук, на факультете появились стажеры и аспиранты из самых дальних регионов и республик страны а также иностранные стажеры и аспиранты. Несмотря на пессимистические прогнозы, конкурс на факультет продолжал неуклонно расти, и реализовывалась возможность качественного отбора студентов. Факультет имел хорошие отношения с высшим руководством города из-за выполненной под руководством В.И. Зубова и Л.А. Петросяна работы по оптимизации распределения капиталовложений по отраслям городского хозяйства, которая в то время была практически единственной математической работой действительно внедренной для использования в экономической системе страны. Благодаря инициативе Николая Ефимовича нам удалось использовать эти взаимоотношения для улучшения жилищных условий ряда наших сотрудников. Большое внимание уделялось рекламе достижений факультета с целью привлечения талантливых абитуриентов для учебы на факультете и разъяснения значения прикладной математики и компьютеров среди сотрудников университета. С этой целью мы с Николаем Ефимовичем написали несколько статей для газеты “Ленинградский Университет”

(Петросян Л.А., Кирин Н.Е. Решающий этап // (ЛУ).—1976.-21 февраля.

Петросян Л.А., Кирин Н.Е. Пятилетка ждет выпускника // (ЛУ).—1977.-22 апреля.

Петросян Л., Кирин Н. Школа опыта // (ЛУ).—1979.-12 октября.

Петросян Л., Кирин Н. Жизнь подсказала решение // (ЛУ).—1980.-30 мая.

Кирин Н.Е. Чтоб водить корабли // (ЛУ).—1985.- 5 апреля.

Кирин Н., Кирпичников Б. Это было недавно // (СПбГУ).—1999.-№20.)

и выступали с докладами и обзорными лекциями по радио, телевидению и на других общественных форумах.

Однако мы тогда еще не знали, что все еще оставались силы, которым достижения ПМ-ПУ не давали покоя. Надвигались новые большие неприятности. Первый сигнал прозвучал на партийной конференции ЛГУ, осенью1977 года. Это было время, когда в полном объеме реализовывалась бредовая идея бывшего ректора ЛГУ А.Д. Александрова о переезде ЛГУ в Петродворец. Дело в том, что, побывав в Англии Александр Данилович обнаружил что Оксфордский и Кембриджский университеты находятся в маленьких уютных городках посреди идиллического пейзажа увековеченного Томасом Гейнсборо. Однако он не заметил, что главный научный центр страны Лондонский Университет находится в Лондоне. Началась реализация идеи переезда. Она была быстро подхвачена болезненно романтическими руководителями хрущевской эпохи и вот уже ученый Совет ЛГУ единогласно принимает решение о переезде в Петродворец. Ректор сулил отдельные коттеджи сотрудникам университета, а студентам монорельсовую дорогу от Петродворца до центра города. К 1977 году физический факультет вместе со своим НИИ уже были в Петродворце. Заканчивалось строительство здания математико-механичекого факультета и НИИ математики и механики. Однако более трезво мыслящие математики быстро поняли, что переезд в Петродворец может резко снизить конкурс на факультет, тем более что в Ленинграде остается ПМ-ПУ который естественно оттянет львиную долю абитуриентов с математико-механичекого факультета. Поэтому возникла идея перевести в Петродворец также и ПМ-ПУ. Эта идея и нашла свое внешнее воплощение в вопросе заданном на упомянутой партийной конференции В.Н.Фоминым ректору университета после его доклада: поедет ли ПМ-ПУ с нами в Петродворец? Вопрос этот был спланирован и заранее согласован с докладчиком, поскольку неожиданная постановка подобных кардинальных вопросов всегда считалась грубым нарушением партийной дисциплины, которая была невозможна в зарегламентированной Ленинградской партийной организации. Ректор ответил, что эта возможность, скорее всего, будет реализована.

Я понял, что борьба будет очень тяжелой и что проработка вопроса проведенного за спиной коллектива достаточно глубока. Николай Ефимович не ожидал такого поворота событий, и мы немедленно подготовили план действий направленных на срыв переезда ПМ-ПУ в Петродворец. На очередном заседании партийного бюро факультета единогласно было принято мотивированное решение о нецелесообразности переезда в Петродворец, затем было проведено партийное собрание, на нем коммунисты единодушно выступили против переезда, а 19 декабря 1977 года я провел заседание Ученого Совета факультета, на котором также единогласно было принято решение о нецелесообразности переезда в Петродворец. Все эти документы были немедленно переданы в партийный комитет ЛГУ и в Ученый Совет ЛГУ. Это был первый в советской истории университета случай, когда целый коллектив единодушно выражал свое несогласие с действиями руководства ЛГУ.

На несколько недель нажим на факультет с целью перевода его в Петродворец ослаб, однако 11.01.78г. партком ЛГУ игнорируя мнение факультета принял волевое решение о переезде ПМ-ПУ в Петродворец. Здесь важно заметить, что никаких специальных помещений для ПМ-ПУ в Петродворце никогда не предусматривалось по той простой причине, что при планировании здания математико-механического факультета нашего факультета просто еще не существовало. Поэтому все прекрасно понимали, что если перевести наш факультет в Петродворец вместе с мат-мехом (уже тогда ПМ-ПУ по количеству студентов и сотрудников составлял половину мат-меха), то мат-меху придется сильно потесниться в новом здании. Каков же выход из создавшегося положения нашли руководители ЛГУ тех лет. Было решено ликвидировать вычислительный центр факультета ПМ-ПУ, слить библиотеки двух факультетов и объединить все, что возможно, чтобы как-то втиснуть нас в общее с мат-мехом здание в Петродворце. Одновременно с этим надо было создать серьезный повод для переезда; ведь увеличение конкурса на ПМ- ПУ в результате переезда мат-меха в Петродворец не могло восприниматься как серьезная причина ни одним относительно непредвзято мыслящим функционером. Надо было придумать другие, более весомые аргументы. И выход был найден. Была сфабрикована легенда согласно которой здание по ул. Смольного дом 3 в котором находился ПМ-ПУ нужно администрации Смольного для размещении там полка милиции. Говорили также, что в освобождении здания заинтересован лично секретарь ОК КПСС Романов и зять Л.И. Брежнева бывший тогда министром внутренних дел СССР. Кроме того в личных беседах с нами руководители университета и сотрудники малого ректората постоянно пытались внушить мысль о том что математизация, информатизация и компьютеризация различных сторон человеческой деятельности является данью моде и вскоре от этого откажутся. Нас с Кириным постоянно запугивали, рисуя неприглядную картину будущего для факультета, если он останется в Ленинграде. Однажды придя на работу, я встретил у входа Николая Ефимовича, который сообщил, что здание факультета занято сотрудниками милиции. Действительно, вдоль коридоров и лестниц, вплотную прижавшись друг к другу, стояли милиционеры. Их было более сотни. Однако они молча стояли и не мешали проведению учебного процесса и перемещению студентов и сотрудников по зданию. Я не стал ничего спрашивать, поскольку всегда считал и считаю, что университет должен быть открыт для всех посетителей, и никто не должен препятствовать входу людей в храм учебы и науки. Милиционеры не должны быть исключением. Наши сотрудники и студенты, увидев спокойную реакцию секретаря партбюро и декана, также хладнокровно продолжали занятия. Через некоторое время милиционеры исчезли. Провокация не удалась. Тогда нам не были известны случаи массового посещения милиционерами подразделений университета и поэтому мы поняли серьезность намерений наших противников. Со своей стороны мы с Николаем Ефимовичем всячески старались укрепить подразделения факультета, как в качественном, так и количественном отношении с тем, чтобы сделать переезд максимально абсурдным мероприятием. Создавалась парадоксальная ситуация: чем лучше мы обосновывали губительность переезда для факультета, тем больше убеждали наших противников (а в данном случае это был партком и ректорат

ЛГУ) в необходимости перевода ПМ-ПУ в Петродворец. Становилось ясно, что тупой отказ от переезда может привести к закрытию факультета, поэтому мы для себя рассчитали вариант, когда придется смириться с прямым диктатом руководства. Летом 1978 года меня и Николая Ефимовича пригласили в ректорат на дележ помещений в новом здании мат-меха в Петродворце. Мы решили поехать, чтобы показать невозможность размещения двух факультетов в одном здании. Присутствовало около десятка представителей мат-меха, но Николай Ефимович тогда был в отпуске. Мне пришлось пригласить заместителя секретаря партбюро факультета по оргработе Николая Анатольевича Зенкевича исполнявшего тогда обязанности секретаря партбюро, чтобы как-то компенсировать отсутствие Николая Ефимовича. Н.А. Зенкевич писал тогда под моим руководством диссертационную работу по теории дифференциальных игр. Но школу общественно-партийной работы он прошел у Н.Е. Кирина. Наши аргументы не были приняты во внимание, и нам не удалось убедить наших оппонентов в нецелесообразности переезда.

Тогда и.о. секретаря партбюро Н.А. Зенкевич созвал внеочередное заседание партийного бюро факультета на котором присутствовал и вышедший из отпуска на один день Н.Е. Кирин. Решение этого заседания принятого по моему докладу мы готовили с Николаем Ефимовичем вместе, поэтому я его приведу полностью.

В партийный комитет
Ленгосуниверситета

В Ы П И С К А

Из протокола №7 внеочередного заседания партийного бюро факультета ПМ-ПУ от 20.07.78г. по вопросу размещения факультета ПМ-ПУ и НИИ ВМ и ПУ в Петродворцовом комплексе.

Присутствовали: Зенкевич Н.А., Исаков В.В., Кирин Н.Е., Крылов Г.Н., Новоселов В.С., Петросян Л.А., Шишкин М.А.

Отсутствовали по уважительной причине: Баринов Н.Г., Веревкин Ю.Н., Шутов С.З.

Председательствовал: и.о. секретаря партийного бюро факультета Зенкевич Н.А.

СЛУШАЛИ: О размещении факультета ПМ-ПУ и НИИ ВМ и ПУ в Петродворцовом комплексе. Докл. Декан факультета Петросян Л.А.

ПОСТАНОВЛЕНИЕ:

Партийное бюро считает, что квалифицированное и принципиальное решение всех вопросов, связанных с перспективами развития факультета без рассмотрения на Ученом совете факультета невозможно. Тем не менее, Ректорат в ближайшее время готовит издание приказа о совместном переезде двух факультетов, в чем проявляется спешка, недопустимая при решении такого важного вопроса, как перебазирование факультета ПМ-ПУ на новое место.

ПОСТАНОВИЛИ:

1. Учитывая создавшуюся обстановку в выполнении постановления парткома от 11.01.78г. о переезде факультетов МАТ-МЕХ и ПМ-ПУ : .- не проводится модернизация проекта с целью увеличения учебных площадей, не выделяются площади для факультета по существующим нормам, процесс подготовки приказа ректора свелся к мелочной торговле между представителями факультета ПМ-ПУ и часто меняющимися представителями МАТ-МЕХ факультета, а в связи с этим и часто меняющимися исходными данными, необходимыми для плана размещения - просить партийный комитет ЛГУ пересмотреть волевое решение от 11.01.78 г. о совместном переезде двух факультетов и принять новое решение, основанное на материально-технических расчетах в соответствии с существующими нормами.

2.Учитывая то, что предложения факультета ПМ-ПУ по размещению в основном не принимаются и то, что совместное размещение двух факультетов затрагивает коренные вопросы жизни факультета ПМ-ПУ, просить партком ЛГУ содействовать тому, чтобы отложить издание приказа Ректора о совместном переезде до рассмотрения окончательного плана размещения на заседании Ученого Совета факультета.

Принято единогласно.

И.О. секретаря партийного бюро
факультета ПМ-ПУ *Зенкевич Н.Е.*

Однако приказ ректора был издан и зимой 1979 года в канун нового семестра факультет осуществил вынужденный переезд в Петродворец. Переезд начался 25 января и был полностью завершен к началу семестра. Учебный процесс начался без единого сбоя. В этом, конечно, была большая заслуга всего коллектива, однако Николай Ефимович как руководитель партийной организации лично много сделал для организованного переезда факультета.

После переезда Николай Ефимович еще некоторое время руководил факультетской партийной организацией. Помимо текущих вопросов в основном связанных с взаимодействием факультетов Петродворцового учебно-научного комплекса университета, организации работы в общежитии, взаимодействия в решении многочисленных кадровых вопросов возникли принципиально новые задачи, связанные с удаленностью мест проживания от места работы сотрудников факультета. Последний вопрос требовал особого внимания руководства. Надо было добиваться на уровне университета выделения достаточно высоких квот на получения жилья для сотрудников нашего подразделения, что было не просто, так как переезд факультета не был спланирован заранее, поэтому получение квартир нашими сотрудниками рассматривалось другими переехавшими факультетами как ущемление их возможностей. В этом вопросе благодаря активности и настойчивости нашей позиции удалось удовлетворить довольно неплохими условиями проживания практически всех желающих. Это был один из немногих положительных моментов переезда. Однако факультет потерял несколько сотрудников, которые из-за своего преклонного возраста не могли тратить несколько часов в день (от 3-х до 4-х часов) на проезд к месту работы в малокомфортных условиях. Невозможным оказался проезд на новое рабочее место и для Владимира Ивановича Зубова (В.И. Зубов в детстве лишился зрения). Ректор университета обещал выделить для Владимира Ивановича автомашину чтобы несколько раз в неделю отвозить его на новое место работы в Петродворец, однако, я не помню ни одного случая, когда это было действительно сделано. Это была потеря для факультета вполне соизмеримая с переездом. В результате В.И. Зубов фактически лишился возможности присутствовать в своем рабочем кабинете в Петродворце. На факультет он приезжал лишь однажды на празднование его тридцатилетия в 1999-ом году.

С 1976 года и до конца жизни Николай Ефимович был моим заместителем в диссертационном совете К-063.57.16 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук по специальностям 01.01.09 - математическая кибернетика и 01.01.07 - вычислительная математика и курировал работы по специальности вычислительная математика. Он всегда оставался одним из наиболее активных членов этого совета. Его замечания всегда были по существу и требовали очень внимательного отношения со стороны диссертантов. За время существования совета на нем было защищено более 300 диссертационных работ по различным направлениям прикладной математики. Список всех диссертаций защищенных в совете с момента его основания с указанием авторов и их научных руководителей можно найти на сайте факультета http://www.apmath.spbu.ru и он опубликован в Трудах XXXII научной конференции студентов и аспирантов “Процессы управления и устойчивость”, СПБ ООП НИИ Химии СПбГУ, 2001, с.468 - 481.

С 24 - 26 мая 2000 года я участвовал в качестве докладчика в работе “Седьмого Венского семинара по оптимальному управлению, динамическим играм и нелинейной динамике: теория и приложения в экономике, исследовании операций и менеджменте”. 24 мая вечером я пошел звонить домой на международный переговорный пункт, находящийся в старой части города. Проходя по бульвару вдоль Рингштрассе (одна из главных улиц Вены, на которой находятся знаменитая Венская опера, Ратуша и Императорский дворец Хофбург) услышал за спиной усиливающийся шелест листвы при полном безветрии, потом что-то мягкое ударило меня по голове, и шелест прекратился. Это был черный ворон. Через полчаса, я дошел до переговорного пункта и позвонил жене в Петербург. От нее я узнал, что Николая Ефимовича не стало.

В. Ф. Демьянов

ПО ВЕРШИНАМ ПАМЯТИ

Чтобы описать выпуклый многогранник, достаточно знать его вершины. Наша память обладает аналогичным свойством: она хранит только элементы жизненной мозаики, отдельные эпизоды и сюжеты, по которым, как по вершинам многогранника, можно вспомнить многое.

Начало 1961 г. Математико-механический факультет ЛГУ готовится к проведению первого дня матмеха: подготовлен песенник “Поет матмех”, заказан факультетский значок, проводятся различные конкурсы: фотоконкурс, конкурс реклам. В общежитии на

Детской 50 подводятся итоги конкурса на лучшую комнату. Вопреки ожиданиям побеждает комната мальчиков: лучшей оказалась комната, где живут студенты 4-го курса Коля Кирин и Слава Кузютин. Хозяева угощают членов Комиссии чаем. Думал ли я тогда, что через несколько месяцев мы все окажемся в одной команде, в лаборатории Теории Управляющих Устройств и Механизмов, где и будем обращаться по разным орбитам вокруг одного светила на всю оставшуюся жизнь.

Октябрь 1964 г. Юра Казаринов, Коля Кирин, Гриша Конев, Володя Хоменюк и я едем поездом на конференцию в Ереван. Коля с кинокамерой, с которой он не расставался всю жизнь (сменив ее впоследствии на видеокамеру). Когда приближаемся к грузинской территории, в вагоне появляются продавцы фруктов. Покупаем "королек", который продавец особенно рекомендует. Немедленно попробовали, никакого удовольствия: вяжет и невкусно (мы ведь не знали, что королек сразу не едят, что, как и хурму, его надо есть, когда он созреет и перезреет). В Тбилиси пересадка на поезд, идущий в Ереван. Приезжаем в Ереван, по радио сообщают о запуске очередного спутника с космонавтами на борту, беседа Н.С. Хрущева с экипажем. Вечером встречаем приехавших на конференцию москвичей, которые советуют "слушать завтра радио". Утром включаем в гостинице радио и ... сообщение ТАСС о Пленуме ЦК КПСС и снятии Н.С.Хрущева.

В один из вечеров идем к месту, где раньше стоял памятник И.В. Сталину. Самого памятника нет, прожектора не работают, темнота, место заросло травой, в темноте летают мыши, и все это на фоне силуэта горы Арарат (находящейся на турецкой стороне). *"Sic transit gloria mundi"*. Подобное впечатление производит сегодня бывший химфак на Среднем проспекте В.О.: запустение, только летучих мышей нет.

Сентябрь 1965 г. Делегация нашей кафедры Теории Управления в состав которой входят Ю.Ф. Казаринов, Н.Е. Кирин, В.В. Хоменюк и я, едет на Совещание по Оптимальному Управлению. Совещание проходит на теплоходе "Адмирал Нахимов" (тот самый теплоход, который трагически утонул в 1985 году, унеся в пучину моря сотни людей). Отправляется теплоход из Одессы. Мы приезжаем заранее, поселяемся в каюте и оправляемся на "Привоз", где покупаем арбузы и дыни целыми авоськами. Цены для Ленинграда смешные: килограмм по 5-7 копеек. Работа Совещания проходила так: теплоход выходил в море и плыл (а может и стоял), секции заседали на разных палубах, наша секция “голых оптимизаторов” перебралась на открытую палубу (почему и получила такое название, ибо все участники были в плавках и купальниках), там же было два бассейна. Николай Ефимович и я решили подарить оттиски наших статей профессору Л.В. Нойштадту, который сидел в ряду перед нами. Когда я вручал ему оттиск, человек, сидевший сзади нас, так вытянул шею вперед, что пришлось удовлетворить его любопытство и показать первые страницы статей. После обеда теплоход причаливал к очередному порту нашего путешествия, и начиналась культурная программа. В Ялте наша группа гуляла по городу, и вдруг Володя Хоменюк резко вырвался вперед, мы его еле догнали. Оказалось, он обнаружил, что за нами следят (люди из той же службы). Мы этих ребят запомнили, я их сфотографировал, и когда позже в Ленинграде со мной беседовал представитель той же фирмы, я ему подарил фотографии его коллег. Думаю, их не похвалили за то, что “раскрылись”.

Конец 70-тых. Факультет и НИИ переезжают в Петергоф. Н.Е. - секретарь партбюро факультета. Как-то академик А.А. Дородницын (директор ВЦ АН СССР) сказал, обращаясь в Н.Н. Моисееву (который в течение ряда лет был секретарем партбюро ВЦ): “Предлагаю тост за Никиту Николаевича. Конечно, партбюро помочь мне как директору ВЦ ничем не могло, но навредить – еще как.” Роль партбюро была “блокирующей”, и там, где эту должность занимал порядочный человек, дело выигрывало. Я был членом партбюро факультета. На одном из заседаний обсуждаются кадровые вопросы (тогда на любую научную или преподавательскую должность дирекция могда принять человека только с согласия партийного бюро). Рассматриваются заявления двух женщин (назовем их А. и Б.) на должность м.н.с. НИИ ВМ и ПУ. Обе имеют математическое образование и рекомендуются соответствующими лабораториями, обе – жены сотрудников Университета. Но есть “мнение” одну взять, а другой отказать. Николай Ефимович хорошо знает и А., и Б., и конечно, считает, что нужно взять обеих. Но ... “мнение”. Н.Е.: “Предлагаю рекомендовать А., поскольку тем самым мы закрепим кадры в Университете, так как и муж, и жена будут работать в Петродворце”. При обсуждении кандидатуры Б.: “Предлагаю отказать Б., так как нельзя разводить семейственность.” Когда я обратил внимание Н.Е. на странную логику его рассуждений, он сказал: “Не торопись с выводами”. К следующему заседанию Николаю Ефимовичу удалось добиться изменения “мнения”, и Б. тоже была рекомендована и принята на работу в НИИ.

Весенний семестр 1999 г. Николай Ефимович и я читаем лекции студентам второго курса. Лекции в одни и те же дни и в тех же аудиториях, у него вторая пара, у меня – третья. На первой паре у меня спецкурс. После спецкурса я прихожу на кафедру и ставлю чайник. Вдруг вбегает Сергей Николаевич Андрианов и передает мне просьбу Николая Ефимовича прочитать мою лекцию в его часы. Оказывается, уже в электричке Н.Е. вспомнил, что не выключил плиту дома, и вернулся в город. Я, конечно, сразу пошел на лекцию. Только начал, как вспомнил, что в спешке забыл выключить чайник на кафедре. К счастью, и у Н.Е., и у меня дело до пожара не дошло.

Декабрь 1999 г. Перед Новым Годом Н.Е. пригласил на свой юбилей. Дети и ученики, друзья и коллеги, тосты и речи, Нина Ивановна ведет видеосъемки. Домашняя приятная обстановка. Возвращение в город на электричке. Николай Ефимович счастлив и весел, полон остроумия и шуток, говорит о планах на будущее. Наступает 2000 год. Кто знал, что он несет...

Л.Г. Амбросова (Л.Г. Хазова)

ЛЕТО 58-го

Идет лето 1958 года. Университет по традиции выезжает в колхоз на сенокос. У нас отряд из 19 девушек и 3-х парней, среди которых и Коля Кирин. Он заметно выделяется среди нас бестолковых и смешливых, совсем не разбирающихся в сельском хозяйстве. А Коля, он у нас старший, деловито, без всякой рисовки запрягает лошадь, едет за молоком, хлебом и овощами, которые нам отпускает колхоз за нашу работу. Делает всё неторопливо, по-крестьянски основательно и, глядя на него с удивлением и доверием, чувствуешь, что ты защищён, что жизнь устроена надёжно и основательно.

А после работы Коля распрягает лошадь, а мы тут же, гладим её, заглядываем в глаза, и нам вдруг разрешается покататься. Седла нет, но Коля уверенно подсаживает, даёт поводья, и ты едешь:

сначала медленно, потом пускаешь вскачь. Восторг охватывает тебя, ты благодарен человеку, который преображает унылое бытие в светлую радость.

В.В. Жук

ВОСПОМИНАНИЕ О Н.Е. КИРИНЕ

В начале августа 1957 года я был зачислен на математико-механический факультет Ленинградского унивеситета и буквально через несколько дней был напрвлен с группой “серебрянных медалистов” на сенокос в бригаду “Путь Советов” колхоза имени Антикайнена. Эта бригада находилась в нескольких километрах от границы с Финляндией. К нашему приезду там уже несколько дней была группа “золотых медалистов”, которые поступили раньше на основании собесдования. Руководила отрядом студентка четвертого курса Оля Бондарева, в дальнейшем известный специалист в облисти теории игр. В один из дней я разговорился с юношей, который привозил на лошади из центральной усадьбы в бригаду продукты питания. Он сразу запомнился мне сдержанностью и продуманностью своей речи.Это и был Коля Кирин.

В сентябре 1957 года почти весь первый курс матмеха был на уборке картофеля, были там и Коля, и я, но никаких воспоминаний об этом периоде у меня не осталось.

В 1957-1958 учебном году мы жили в одном общежитии (на Детской 50), естественно, часто встречались, но отношения имели лишь формальный характер. Наиболее близким его приятелем, был в то время Слава (Вячеслав Федотович) Кузютин, с которым он жил в одной комнате. В июне 1958 года я неоднократно встречался с Колей на Смоленском кладбище, которое находилось рядом с общежитием. Там мы готовились к экзаменам.

В то время студенты, по крайней мере младших курсов, должны были, как комсомольцы, отработать в летнее время месяц в колхозе. Я выбрал июль и оказался в одном отряде с Колей. Отряд состоял из 22 человек: трех юношей (Коля, Лёня Сосинский - добродушный, интеллигентный человек, но не привыкший к физическому труду, ныне покойный, и меня) и девятнадцати девушек. Большая часть девушек никогда серьёзно физически не работала.

Мне запомнилась фраза, сказанная одной из них: “Я никогда тяжелее скрипки в руках ничего не держала”. Отряд был направлен в заброшенное место вблизи (не помню куда точно) с границей Финляндией. Он расположился в сарае с широким и высоким дверным проёмом без дверей и крышей, протекавшей уже при среднем дожде. Мы должны были косить и складывать траву в стога. Коля был наиболее знаком с крестьянским трудом и, естественно, стал командиром отряда. Эту обязанность он выполнял безупречно. Коля научил меня запрягать лошадей, и я стал, наряду с работой в поле, ездить за продуктами. По ночам, близко к месту, где мы расположились, паслись несколько лошадей (естественно, без седел). Коля любил на них кататься, и учил этому других желающих.

Остался в памяти ещё один эпизод, связанный с лошадьми. Однажды рано утром мы сели с ним на одну лошадь и въехали в сарай, в котором в то время ещё спали девушки. Эффект превзошёл все наши ожидания.

Пребывание в колхозе Коля описал весьма подробно в стихотворной форме. У меня в памяти осталась лишь фраза: “Бригадир, дядя Егор, вёл один лишь разговор: “Вы, ребята, не сидите, Вы, ребята, луг косите.”

После колхоза мы поехали домой в одном вагоне: Коля в Вологду, я в Киров. По пути много играли в карты (в дурака). Коля играл обдуманно, также как и всё, что он делал, и выигрывал чаще, чем я.

В сентябре 1958 года Коля и я снова работали вместе в одном из колхозов: собирали картошку. В основном, мы занимались тем, что вывозили с поля на лошади ящики с картошкой, при этом часто работали в паре. Здесь у нас нередко возникали разногласия. Коля хотел все делать капитально, в обычном своём стиле, а я считал, что это избыточно: если что-то и случиться, то удержим и так. Надо отметить, что Коля обладал отличным природным здоровьем и, несмотря на небольшой рост, большой физической силой.

На втором курсе практику по дифференциальной геометрии почти во всех группах вёл замечательный геометр Юрий Александрович Волков. На контрольных работах Ю.А. давал не совсем стандартные задачи и потому основной массой студентов они переписывались по несколько раз (даже по восемь или девять). Коля, который был полным отличником, писал эти контрольные работы с первого раза. Обсуждая с ним эти работы, я имел возможность близко познакомиться с его математическим мышлением. Оно, в основном, имело геометрический характер. Коля имел прекрасное пространственное представление и, как правило, в своих рассуждениях отталкивался от простейших геометрических картинок. Где-то в середине 70-х годов ко мне подошли студенты и попросили объяснить одно место в конспекте по математическому анализу. Я ответил, что никогда не слышал о таком понятии и посоветовал обратиться к преподавателю, который читал эти лекции. Позднее выяснилось, что студенты рассматривали этот вопрос как тест, итоги которого они отразили в стенгазете. Было очень забавно читать, что и как отвечали подопытные. Ответы были такими, что человек узнавался сразу. Н.Е. ответил: “Не знаю, но давайте подумаем вместе, что это могло бы значить”. Когда я прочитал этот ответ, то подумал: в этом весь Кирин. В конце студенты отметили, что фраза, которую они просили расшифровать, была опиской.

Начиная с конца второго курса и до окончания университета, я с Кириным общался сравнительно немного. Помню точно, что в летнюю сессию 1960 года мы пробовали вместе готовиться к экзамену по комплексной переменной, но из этого ничего не вышло.

В 1962 году мы оба поступили в аспирантуру: его научным руководителем стал Владимир Иванович Зубов, моим - Исидор Павлович Натансон. К сентябрю 1963 года в Старом Петергофе было построено аспирантское общежитие. Администрация матмеха настаивала на том, чтобы иногородние аспиранты переехали в Петергоф. Многие этого не хотели и находили различные поводы, чтобы остаться в Ленинграде. Коля загорелся идеей переехать в Петергоф: его привлекала природа, и предложил мне переехать тоже и поселиться с ним в одной комнате. Мы первые поселились в аспирантском общежитии в Петергофе (тогда Халтурина 13) в центральной комнате пятого этажа. Вместе с нами, тогда же, поселился и Геннадий Константинович Баландин (ныне покойный). Тогда Гена был блестящим молодым человеком. Он имел красивую внешность, был хорошим легкоатлетом: прыгал в длину далеко за шесть метров. Гена был также кандидатом в мастера по шахматам и подавал серьёзные надежды в математике. К Коле Гена относился с большим уважением.

Однако обстоятельства сложились так, что общались мы мало: Коля и Гена, в основном, были в Ленинграде в лаборатории В.И. Зубова, а я занимался в публичной библиотеке. Однажды, осенью

1963 года, в нашу комнату приехали почти все сотрудники лаборатории В.И. Зубова вместе с ним. Тогда я увидел, какой большой авторитет имел Н.Е. у членов лаборатории, в том числе и у В.И. Выяснилось, что у Коли уже готова кандидатская диссертация. Я в то время ещё только занимался изучением литературы. Дело состояло в том, что я всё ждал, когда мне будет поставлена тема диссертации, не понимая того, что в это время Исидор Павлович, будучи тяжело больным, не мог этого сделать. Сам факт, что у Коли готова диссертация, а у меня ничего нет, сильно активизировало мою деятельность. Я взял докторскую диссертацию по теории приближения, только что защищенную в Ленинграде и начал усиливать установленные там результаты. Поскольку это была слабая диссертация, то я довольно быстро получил много результатов, которые и показал И.П., надеясь на похвалу. И.П. отнёсся к моей деятельности отрицательно: незачем развивать слабые результаты. Но как модно теперь говорить: процесс пошёл. Через месяц я получил результаты, которые мне понравились (и я сейчас отношусь к ним положительно). И.П. нашёл, что их достаточно для кандидатской диссертации. Должен сказать несколько слов об И.П. Это был мужественный и доброжелательный человек. Несмотря на тяжёлую болезнь, он внимательно читал сырые рукописи моих работ, требовал от меня, преодолевая серьёзное моё сопротивление, тщательной их редакции, помогал советами, а также помогал устраивать мои первые работы в хорошие журналы. Как я теперь понимаю, с научным руководителем мне повезло.

В это время из заграницы вернулся В.Ф. Кузютин и Коля перешёл жить в комнату к нему. Гена к этому времени устроился жить в Ленинграде и я остался в комнате один.

Однажды, в январе 1964 года в весьма холодную погоду (где-то за -20^{o}C) в воскресенье я около общежития повстречался с Колей, который был в валенках. Не помню, кто из нас сказал: "Почему бы нам не пересечь Финский залив". Другой ответил: "Действительно следует". Мы тут же отправились в путь. Я был в полуботинках (другой обуви у меня в то время и не было) и через некоторое время у меня замерзли ноги. Мы стали меняться обувью, и залив был пересечён. Вышли мы в районе Лисьего носа, как раз в запретную зону. Однако, у нас, по-видимому, был такой жалкий вид, что охраннику не пришло в голову, что мы злоумышленники. После этого мы поехали в Рощино к Борису Константиновичу Кирпичникову, которого Н.Е. очень любил бывать.

Вернувшись, мы рассказали об этом в общежитии, и через две недели состоялась ещё одна такая прогулка в составе шести человек (Гены, Коли, меня и трёх девушек), но уже на лыжах. В девяностых годах я ехал с Колей в одной электричке и мы вспомнили о нашем походе, но повторить его желания не возникло.

После окончания аспирантуры Коля остался в Ленинграде, а я уехал по распределению в Новгород. Коля дважды приезжал ко мне, первый раз один, второй с женой Ниной Ивановной.

В 1970 году я решил переехать в Ленинград и стал обменивать квартиру. Для переезда, в частности, была нужна справка о том, что мне будет предоставлена в Ленинграде эквивалентная работа. По техническим причинам обмен затянулся и те договорённости, которые я имел, потеряли силу. В то время в университете открылся под руководством В.И. Зубова факультет прикладной математики - процессов управления, на котором Н.Е. играл значительную роль. Я обратился к Н.Е., не может ли он помочь получить мне требуемую справку. Причем я не стану претендовать на реальную работу. Коля переговорил с В.И., который сказал, что такую справку, несомненно, дадим, и, вообще говоря, Жуку место на факультете найдется.

Переехав в Ленинград, я, после некоторых раздумий, обратился к В.И. и был принят на факультет. Этот факт в большей мере определил мою дальнейшую жизнь.

В начале 70-х годов я имел дружеские отношения с Колей, выходящие за рамки служебных, и имел возможность близко познакомиться с ним, как с личностью. Это был умный, в целом благожелательный, практичный, твердый и скрытный человек. Он был честолюбив, но заметить это можно было только тщательно наблюдая за ним, на поверхность это выходило очень редко.

Н.Е. имел большое влияние на В.И., но никогда этого не афишировал, а скорее старался приуменьшить свою значимость. Не могу сказать, что я понял его душу. Но я научился почти безошибочно прогнозировать, как он ведет себя в той или в иной ситуации. Иногда меня удивляли (я не понимаю их до сих пор) его редкие высказывания, в которых звучали сентиментальные ноты (типа того, что он хотел первую свою книгу посвятить В.М. Шукшину), но я знал, что в жизни они осуществлены, не будут.

Начиная с середины 70-х годов, наши отношения стали благожелательными, но чисто формальными и такими оставались до конца жизни Н.Е.

Я благодарен судьбе, за возможность общаться с Н.Е., который (как это ясно из сказанного выше) сыграл существенную роль в моей жизни.

Ю.В. Заика

СНАЧАЛА Я НИЧЕГО НЕ СЛЫШАЛ

Знакомство с Н.Е. (аспиранты моего поколения именно так называли Николая Ефимовича) началось буднично - он читал курс численных методов. Это был "далекий" 80-й год и я к тому времени уже увлекся топологией. Энтузиазм и лекторское мастерство, с которыми С.Н. Кирпичников принялся внедрять в курс механики язык В.И. Арнольда, производили впечатление. Но "некоторые любят погорячее" - червь прикладника точил изнутри. Захотелось не только представить, но и увидеть. И я взял тему дипломной работы у Н.Е. Это была нелинейная задача наблюдаемости динамических систем, а в качестве приложения предлагалось отслеживать центр масс ЛА. Почему именно Н.Е.? Его лекции не были методически идеальны. В учебной литературе нередки "причесанные" доказательства, начинающиеся с "рассмотрим $\delta < Mln(N)\exp(P)\varepsilon$". В конце получается классическое "$|R| < \varepsilon$, что и требовалось доказать". Н.Е. читал честно - к концу длинных выкладок получалось нечто трехэтажное, но домноженное на ε. А далее уже все понятно: "это сколь угодно мало при достаточно малом ε". Тем самым, он демонстрировал естественный путь размышлений, которым, не исключено, шел и сам автор результата. Н.Е., начиная подкрадываться к доказательству с правдоподобных гипотез и размышляя сам, учил этому искусству и нас. При этом все было естественно - порой приходилось вымарывать страницу с ошибочными выкладками, что очень раздражало прилежных слушательниц. И только много лет спустя Н.Е. признался, что часто в силу обстоятельств приходилось готовиться по дороге на лекцию. Но уровень профессионализма позволял. Н.Е. умел показать красоту результата не задним числом, когда доказательство уже живет своей жизнью, а в процессе его рождения. Люди различаются по стилю изложения и восприятию, учиться желательно многому и у многих. Школа Ленинградского университета предоставляла широкий диапазон выбора. Каждый искал и находил своего руководителя. Моим стал Н.Е., у которого я пытался учиться мыслить последующие двадцать лет.

Н.Е. взял меня в аспирантуру и даже назвал коллегой. Рано. Как-то он заболел и попал в больницу. Молодой и наглый ученик его и там нашел для консультации. Н.Е. был занятым человеком, в лучшем случае удавалось скороговоркой пообщаться с ним в коридорных перебежках. Я упрекнул его, но Н.Е. очень спокойно отреагировал: “Юра! Главное (99 %) - это постановка задачи, которая через три года будет интересна членам Совета, а твой 1 % - это погрешность вычислений”. Обидно. Я решил проявить полную независимость и вскоре увлекся теорией аналитических множеств. До того захотелось применить комплексный анализ, что в определенной степени это удалось. Н.Е. не вмешивался и свою тактику не навязывал. Он поставил задачу найти аналитический аппарат для извлечения пользы из принципа двойственности в теории наблюдения и управления. В линейном случае этот результат хорошо известен. Н.Е. увидел возможность его естественного обобщения на нелинейные динамические системы.

Начну издалека. На матмехе ЛГУ Н.Е. специализировался по вычислительной математике. Это были годы создания В.И. Зубовым своей школы современной математической теории управления. И Н.Е., как его ученик, стал автором одних из первых вычислительных методов оптимального быстродействия. Сам он всегда с удовольствием вспоминал то время: силы соответствовали высокому уровню энтузиазма, и фундаментальные работы в этой области пеклись как пирожки. Школа Зубова развивалась в тесной связи с инженерно-физико-техническим потенциалом Ленинграда. Все, что конфликтовало с концепцией устойчивости (а значит, и практической реализуемости), быстро отмирало. В частности, по словам Н.Е., молодежь не нацеливалась на технику принципа максимума. Впрочем, об этом периоде лучше и точнее расскажут коллеги. Здесь хотелось только указать корни способности Н.Е. качественно чувствовать реальную цену того или иного математического результата, его “считабельность”. Он обладал тонким юмором и авторам статей иногда доставались корректные, но не без доброжелательной иронии комментарии.

Вернемся к нелинейной задаче наблюдения. Это обратная бесконечномерная задача обращения отображения R^n в пространство вектор-функций, заданного неявно (в силу системы дифференциальных уравнений). Серьезный набор математических неприятностей - Н.Е. умел нацелить на емкую задачу. Львиная доля статей на эту тему основана на следующем подходе: вычисляем конечное число производных выхода и применяем критерии инъективности отображений в конечномерных пространствах. В общем случае этот путь приводит лишь к достаточным условиям наблюдаемости. Теоретическая прелесть в том, что в приложениях модели движения и измерителей содержат, как правило, элементарные функции, а значит, таковыми являются и производные выхода. Но вычислительная некорректность последовательного дифференцирования реальных зашумленных измерений приводит к неработоспособности соответствующих алгоритмов восстановления фазового состояния за заданное время (теорию асимптотических наблюдателей здесь не затрагиваем). Целесообразнее строить независимые интегральные операторы наблюдения заданных функций фазового вектора. Да, математика сложнее, но Н.Е. всегда советовал (и даже настаивал) за основу брать реалии задачи, а не конкретный математический аппарат ее решения. Операторная формулировка страдает неконструктивностью, и Н.Е. предложил в качестве сопряженной системы уравнение типа переноса, которое позволило переформулировать проблему в терминах линейной граничной задачи для уравнения в частных производных первого порядка. Обратную нелинейную некорректную задачу "обменяли" на линейную, но распределенную. С учетом, в частности, развитой теории прямых методов численного решения линейных краевых задач математической физики такой подход представляется оправданным. Но не будем упрощать, универсального алгоритма для нелинейной задачи наблюдения быть не может. Простая аналогия - решение системы линейных уравнений $Ax = b$. Это задача наблюдения: задан оператор A (матрица), по "измерениям" b нужно "восстановить" x. Критерий однозначной разрешимости прост, а вот вычислительные алгоритмы - вечная тема. Разумеется, речь идет о емких прикладных задачах, одним из существенных этапов численного итерационного решения которых является $Ax = b$ с нетривиальными размерностью и структурой A. Заслуга Н.Е. в том, что он предложил один из возможных конструктивных путей построения эффективных численных алгоритмов решения "гробовой" задачи наблюдения нелинейных систем.

Что касается конкретного аспиранта, то к тому времени, когда Н.Е. стал его разыскивать, тому кое-что удалось сделать. Н.Е. оценил, а дальше просто смена кадров - выступления, поездки, отзывы, подписи, печати. Не обходилось без курьезов. Буквально "накануне" вернули автореферат - Н.Е. расписался в акте экспертизы, гласившем, что Родину в тексте я не опорочил. Руководителю аспиранта отказывали в патриотизме по определению. Задумываться бессмысленно, такое было время. В далекой столице ныне ближнего зарубежья нужна была печать на отзыве. День приема завтра, а поезд - сегодня. В отчаянии открываю дверь. Поначалу почти скандал, но, узнав, откуда и от кого, быстро все оформляют и передают приветы уважаемым в науке людям.

Читателю может показаться, что автор пишет о себе, хотя преследуется другая цель - на примере себя рассказать о том, как Н.Е. пеленал учеников. Всегда помогал, не выпячивая себя. Он работал со мной на подступах к теме, но когда понял, что идея во мне, отпустил на свободу. Иначе я бы стал рабом его техники. Очень многое прощал: "Юра! Я просто кипел, когда общался с тобой-аспирантом". Сейчас, когда приходит аспирант (научный внук Н.Е.) и его по молодости заносит, хочется как ... Тут я вспоминаю Н.Е. и после выдоха начинаю: "Ты почти абсолютно прав, но вот в этом месте есть маленькая...". Н.Е. не скупился на идеи и раздавал их аспирантам. Всегда тепло отзывался о сотрудниках своей кафедры, поддерживая неизменно доброжелательную атмосферу. С удовольствием вспоминаю А.П. Иванова и Л.Т. Позняка, с которыми часто доводилось общаться по различным научным, и не только, вопросам. Листая книги Н.Е., чувствуешь, что 4 доктора и более 20 кандидатов наук среди его учеников не все исчерпали. Многое, особенно высказанное на уровне обсуждений и обобщений, осталось пока нереализованным.

Особенно хочу отметить научную порядочность Н.Е. Он вспоминал как-то о случае, когда по дороге на семинар со своим докладом обнаружил на ходу существенную ошибку в доказательстве. Сообщил об этом Зубову за 5 минут до доклада. Тот тут же сам выступил со своими результатами. Это школа. Однажды я вписал Н.Е. в свою работу, оценив значимость самой идеи. Но он был самодостаточен - не раздумывая и ничего не объясняя, вычеркнул свою фамилию. Профессионализм сочетался со скромностью, на одной из конференций пришлось долго его уговаривать подарить, не стесняясь, его последнюю монографию видному ученому.

Но вернемся к хронологии. В период 1985-1991 пришлось служить “за забором” на Байконуре в филиале МАИ. Там в то время собрался славный коллектив выпускников ПМ-ПУ и матмеха. Примета времени (участие в НИР): заходишь в секретную комнату и пишешь в секретной тетради секретные формулы. Предполагалось, что заходишь не помня, а выходишь забыв. Накануне “беловежско-пущинских соглашений” мы пригласили Н.Е. и отца студенчества ПМ-ПУ моего поколения В.Ф. Кузютина в качестве членов ГЭК. На Байконуре мы обошли все исторические площадки. В домике Королева Вячеслав Федотович, человек искристой жизнерадостности, перед выходом даже в туалет заглянул - все ли там по-человечески. На Гагаринском старте ощупали каждую гайку (хотя они давно уже не те). Запомнился визит в музей, где девушка-экскурсовод восхитилась количеством всевозможных лампочек и кнопочек на пульте ЭВМ, обслуживавшей первые запуски. На что Н.Е. в свойственной ему манере мгновенно заметил: “Чему Вы удивляетесь? Кнопок не больше, чем на баяне”. Обсуждали очень интересные задачи. Бывали случаи, когда простой советский офицер после тяжелой работы заходил к нам в институт и формулировал в инженерных терминах такие задачи, по которым до сих пор слюнки текут. Чтобы поддержать нас, молодежь, Н.Е. даже собирался связаться со знакомыми математиками в Алма-Ате, но ситуация быстро менялась, и пришлось в итоге разъезжаться.

Затем была докторантура. Однажды по совету Н.Е. я пошел проконсультироваться к Зубову по поводу неких функционалов. Передо мной, видимо, были физики. В.И. сказал, что функционалы ему и без меня надоели и дал команду заняться моделями взаимодействия водорода с конструкционными материалами и методами их параметрической идентификации. Математическое моделирование трактуется очень широко: в одной из “контор” заявили, что “наконец-то в ЛГУ делом решили заняться, будете ездить и выбивать нам металл нужной вязкости”. В конечном итоге судьба свела с профессионалами из НИИФа, с которыми активно сотрудничаем до сих пор. Сам Н.Е. давно уже начал заниматься обратными задачами математической физики, предприняв попытку создать достаточно общую теорию оценивания в распределенных системах с учетом различного рода возмущений в уравнениях модели. Это уже в рамках теории управления и наблюдения в условиях неопределенности.

Так что тут наши научные интересы пересеклись с новой силой. Конечно, мы попытались адаптировать к новым задачам освоенный аппарат сопряженных уравнений. Но через некоторое время обнаружили, что “ничто не ново под Луной” - эта ниша давно и успешно занята школой Г.И. Марчука. Горевали недолго и, трезво оценивая свои возможности, занялись конкретными задачами в рамках общей идеи, восходящей еще к Лагранжу. Н.Е. постоянно подбадривал, заботясь о сохранении жажды исследований. В том числе и материально: на его имя были получены гранты РФФИ и по программе поддержки ведущих научных школ России. А времена были трудные. Профессор ЛГУ в обеденный перерыв достает кусок хлеба с яйцом, сыром и огурцом, делится почестному с докторантом, и, запивая эту вкуснятину чаем (чашка-вода-кипятильник), мы обсуждаем текущие математические идеи. Иногда обсуждения продолжались уже дома у Н.Е. Нина Ивановна неизменно окружала просто Юру искренним домашним теплом, я ей очень благодарен. Не буду повторяться - конечно же Н.Е. оказал незаменимую поддержку в разветвленных лабиринтах процедуры защиты диссертации. Его знали и доверяли его научной компетентности - репутация, достигнутая огромным трудом.

Вскоре кандидатуру Н.Е. выдвинули на звание заслуженного деятеля науки РФ. Быстро выяснилось, что и в Петрозаводском университете и в Карельском научном центре РАН все, кто когдалибо бывал по научным делам на ПМ-ПУ, прекрасно помнят Н.Е. У кого-то он принимал экзамены в аспирантуру, кому-то подписывал отзыв, кого-то “брал на зубок” на семинаре кафедры, чью-то диссертацию представлял и т.д. Мнение оказалось абсолютно единодушным - Н.Е. был доброжелательным человеком и многим бескорыстно помогал, когда дело было правое. В итоге Совет ПетрГУ единогласно поддержал его кандидатуру, отметив заслуги в подготовке научных кадров для Карелии.

Самое время было пожинать плоды многолетней успешной работы, ученики по всей России, и не только. Н.Е. чувствовал новый подъем творческих сил, открылось второе дыхание. А тут эта жестокая смерть. Судьба почему-то решила оставить его достоянием прошлого века. Остались идеи. Во многом на те или иные математические результаты я смотрю глазами Н.Е. Он умел увидеть проблему с неожиданной стороны и лаконично сформулировать ее суть. А мог и с юмором возвысить простенькую мысль в разряд внешне презентабельной теории. Ироничные комментарии лишь усиливали степень доходчивости рассуждений. Его фраза из предисловия одной из книг: “Там, где используется терминология теории нормированных пространств, читатель, вслед за автором, может с успехом обойтись представлениями трехмерного векторного пространства” - стала моим девизом.

Я попытался раскрыть тот образ Н.Е., который остался во мне. Он был обычным человеком со своими достоинствами и недостатками. Со мной на протяжении 20 лет он вел себя как Учитель, и я остаюсь его учеником. На могиле Н.Е. написано - профессор Санкт-Петербургского университета. Это его высший и заслуженный титул. На любительской фотографии - Гагаринский старт. Такое впечатление, что я просто пошутил, прощаясь с Землей перед полетом, и вернулся, а Н.Е. шагнул дальше.

И.Д. Колесин

ОБ ОДНОЙ ДАРСТВЕННОЙ НАДПИСИ

Дарственные надписи иногда обнаруживают характер автора больше, чем рассказ о нем. Раскрываю книгу в голубом переплете “Оптимизация процессов в управляемых системах”. Рукой Николая Ефимовича - надпись: “Дорогому Игорю Дмитриевичу Колесину в знак признательности за творческое сотрудничество и стимуляцию интереса к проблемам математических приложений в медицине, социологии, ... С наилучшими пожеланиями и посвящением в Приложении 3”. В этом коротком обращении уже виден Николай Ефимович - и как человек, и как математик, и как ученый. Приложение 3 - это раздел, рассматривающий задачу о минимуме квадратичной функции в выпуклом многограннике. Идеи Приложения 3 рождались у Николая Ефимовича в живом обсуждении проблем медицинской диагностики. Такие обсуждения устраивались с дипломниками , и Николай Ефимович принимал в них самое действенное участие. Начинались они в электричке - с обсуждения “содержательной части” и затем продолжались у доски. Николая Ефимовича особенно интересовала возможность совмещения двух операций: оптимального разделения двух множеств и “взвешивания” показателей и элементов множеств. В результате Николай Ефимович сформулировал две задачи медицинской диагностики: одну, основанную на построении линейных оболочек двух множеств, другую - на отыскании опорной плоскости. Эти задачи перешли затем в курсовые и лабораторные работы, давались дипломникам. Следует сказать, что все дипломники проходили практику в институте пульмонологии (легочных заболеваний), где Николай Ефимович также участвовал однажды в обсуждении проблем диагностики.

Другой сферой общего интереса было применение математических методов в социологии и эпидемиологии. Николай Ефимович видел в этом хорошую перспективу и не отказывал в обсуждении этих направлений. Но был требовательным в отношении научной ценности приложений и практической пользы их.

Одно удивительное качество характеризовало Николая Ефимовича: сочетание требовательности с юмором. Юмор прорывался и в серьезных научных спорах, и в обычной обстановке, иногда в удивительной форме. Вспоминается подготовка новогодней стенгазеты (1968 г.), где Николай Ефимович принимал самое живейшее участие. Здесь его неистощимый юмор обыгрывал тогдашнюю тенденциозность и косность газетных передовиц. Результатом этого эмоционально-творческого всплеска (исполенного в рамках дозволенного) стала "Передовая статья" - в виде набора трафаретных цитат того времени, заканчивавшихся "неразборчивыми" росчерками (писалось от руки). На утро уборщица, подметая, остановилась у стенгазеты и, став читать, с сожалением сказала: "не могли уж разборчиво написать".

М.И. Летавин

* * *

"Но те, которым в дружной встрече
Я строфы первые читал...
Иных уж нет, а те далече,
Как Сади некогда сказал."
А.С. Пушкин *"Евгений Онегин"*

Познакомил меня с Николаем Ефимовичем Кириным Владимир Васильевич Жук, у которого я в течении первого и второго курса учился на спецкурсе по конструктивной теории функций. Я спросил у него совета как мне выбрать направление, если я хочу заниматься прикладными задачами, и Владимир Васильевич мне посоветовал посещать киринские спецкурсы. Кроме того, он порекомендовал меня Николаю Ефимовичу как добросовестного студента. К тому времени я уже знал Николая Ефимовича по курсу матанализа, который он нам читал в третьем и четвертом семестре. Это был 1972 год.

Курс матанализа по выражению лектора был очень простым и на уровне идей (“идейным”). Было много геометрических иллюстраций, шляпок и черточек над символами. Запомнились некоторые специфические моменты: лектор помнил нумерацию формул с самого начала курса; нередко обращался к аудитории за подсказкой; проводил коллоквиумы, на которых умудрялся силами студентов восстанавливать куски теории вместе с набросками доказательств; в его изложении казалось, что предмет живет и куда то движется. На третьем курсе Николай Ефимович читал “Численные методы”. Оттуда я запомнил фразу “Не важно, что просто. Было бы полезно”. Количество шляпок и черточек не уменьшилось. Особенность курса состояла в том, что некоторые идеи постепенно развивались и демонстрировались в применении к различным задачам. На четвертом курсе был еженедельный спецкурс по численным методам в теории управления. После выхода в 1975 году книги “Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем” стало ясно, что автор как раз обкатывал на нас идеи и методы этой книги. Здесь уже было много трудностей в восприятии материала и запомнилось терпение, с которым Николай Ефимович разъяснял некоторые частные вопросы в процессе занятия и после его окончания. На пятом курсе работал еженедельный киринский семинар по методам решения экстремальных задач. Силами участников разбирались различные работы по оптимизации. В частности запомнилось сильное впечатление от методов второго порядка типа “сопряженных градиентов”. Здесь Николай Ефимович в основном поддерживал докладчиков морально и резюмировал место и взаимосвязи реферируемой работы, а так же часто в двух словах пересказывал содержание - так что работа становилась понятной докладчику и остальным участникам спецсеминара. Николай Ефимович согласился быть руководителем моей дипломной работы и определил мне тему “Градиентные методы оптимизации параметров пучков заряженных частиц в линейных ускорителях". С этого времени я получил возможность познакомиться с его методом индивидуальной работы. Основное мое впечатление от этого периода и последующей работы в аспирантуре заключалось в том, что он заведомо знает как подходить к постановке и решению задач и мне достаточно хорошо обсудить с ним очередной этап, чтобы затем двигаться дальше. Поэтому я довольно часто приходил к нему со своими рассуждениями. Иногда это были откровенные глупости и это я понимал по специфическому прищуриванию и легкой иронии. Не помню, однако, чтобы Николай Ефимович когда либо раздражался.

Летом 1975 года состоялся важный разговор в одной из комнат второго этажа Смольного института около деканата. Я просил Николая Ефимовича взять меня в аспирантуру и он согласился. Последующие три года он поддерживал меня в моих исследовательских начинаниях. Происходило это примерно так, что получив очередной заряд оптимизма после разговора я работал и постепенно заходил в тупик и приходил в уныние по поводу своих способностей. Тогда начинал договариваться о встрече и летел за новым зарядом оптимизма. Если встреча назначалась у Кириных дома, то обязательно разговор начинался с чаепития. Кормили до тех пор, пока я не успокаивался и только потом в гостиной или в кабинете начинался разговор. Больше всего в период аспирантуры меня беспокоило то, что я могу не оправдать его доверие и не подготовлю работу, которую он бы рекомендовал к защите. Так и случилось. Я уехал на работу в Ульяновск, не написав диссертацию.

В Ульяновский период я общался с Николаем Ефимовичем по почте и по телефону. Он постоянно подчеркивал серьезность и значимость моих исследований, так что диссертация была завершена и в 1982 году он рекомендовал ее к защите. После защиты диссертации я спросил его мнение и он сказал, что диссертация хорошая. Это было для меня большой наградой.

В период работы в Череповце я стремился приезжать на семинар Кирина. Иногда выступал. Присылал ему свои работы. Я всегда радовался, если удавалось ему рассказать что-то новое. Из этого периода вспоминается замечание по поводу доклада одного ученого, который ссылался на сложность своих построений. Николай Ефимович разъяснил в чем состоит центральная идея теории и добавил: "... потом оказывается, что просто два раза продифференцировали”. В определенный период Николай Ефимович посоветовал мне выступить на семинаре В.И. Зубова. Этим он подтолкнул меня к работе над докторской диссертацией. Весь период прохождения диссертации я советовался с ним по всем вопросам - от подбора материала до выбора оппонентов. Диссертацию он одобрил.

Для меня Николай Ефимович стал главным Учителем, хотя я так и не решился спросить, считает ли он меня своим учеником.

В. Т. Приставко

Н.Е. КИРИН — УЧИТЕЛЬ И ДРУГ

С Николаем Ефимовичем Кириным я впервые встретился в общежитии №8. Тогда и теперь, когда там живут “новые русские”, мы все называли наше общежитие ласково “восьмёрочка”. Жили весело и дружно. Преподаватели и аспиранты не редко приходили в “восьмёрочку” на различные встречи и вечера со студентами, проводимые студсоветом общежития, а также для консультаций по предметам. Там еще в декабре 1964 я познакомился с Николаем Ефимовичем, тогда для нас он был просто Коля. Несмотря на то, что математический анализ он не преподавал в моей группе (преподавателем была доц., к.ф.-м.н. Тамара Константиновна Чепова - ученица самого Фихтенгольца), он всегда и всем, кто к нему обращался, оказывал консультации. Это было в духе того матмеховского времени. Третий курс “курировал” первый, четвертый – второй, пятый – третий. Практически любого преподавателя, включая ДэКа (Дмитрия Константиновича Фадеева - чл.-корр. АН СССР), можно было остановить в коридоре и получить исчерпывающую все неясные вопросы консультацию.

Следующей памятной встречей с Н.Е. Кириным был экзамен по спецкурсу “Теория оптимального управления” в 1968 году, который читал нам зав. кафедрой теории управления, основоположник будущего факультета прикладной математики - процессов управления проф., д.ф.-м.н. В.И. Зубов. Экзамен как правило принимали практически все доценты кафедры и имелась возможность выбора экзаменатора. Естественно, я сдавал экзамен Николаю Ефимовичу, которого к этому времени знал хорошо, работая с третьего курса лаборантом (0,5 ставки) кафедры теории управления. После наших ответов на билет и вопросы, а экзаменовал он одновременно со мной и моего товарища А.Г. Черемeнского, еще был получасовой разговор о проблемах теории управления, о задачах и направлениях возможных исследований. Оба мы сдали экзамен на "отлично".

В 1970 году мои студенческие учителя В.И. Зубов, под руководством которого я выполнил дипломную работу, и Н.М. Матвеев, в семинаре которого по качественной теории дифференциальных уравнений я участвовал с 1965 года по 1967 год, пригласили меня в заочную аспирантуру нового в ЛГУ факультета ПМ-ПУ (прикладной математики - процессов управления). Для сдачи вступительных экзаменов требовалась характеристика с места работы (Конструкторское Бюро г. Москва). Характеристику мне дали с большой затратой нервных клеток, так как я проработал в КБ менее двух лет и не было ни одной публикации (так называемого в то время "задела"). Дали с условием, что буду работать в аспирантуре над спецтемой по направлению теоретического отдела КБ.

Разрешение ("допуск") на ознакомление с заданной темой имело всего несколько профессоров и доцентов нашего факультета. Естественно, несмотря на рекомендации декана факультета профессора В.И. Зубова и заведующего кафедрой высшей математики профессора Н.М. Матвеева, практически никто не хотел связывать себя с такой темой, так как возможности поездки в загранкомандировки резко ограничивались. Да и формулировка темы была сугубо технической. Математических исследований там и близко не было видно. Николай Ефимович Кирин - единственный, кто пошел навстречу моим желаниям заниматься наукой (кстати к этому времени я сдал кандидатский минимум по иностранному языку и марксистко-ленинской философии в АН ЭССР). Более того, он предложил и с согласия В.И. Зубова позвонил к.ф.-м.н. Юрию Зосимовичу Алешкову, работающему в то время в аналогичном КБ в Ленинграде и более близкому к техническим разработкам тем, на предмет совместного научного руководства такой работой.

Во время обучения в заочной аспирантуре по моему желанию, чтобы "не докучать" мелочами своего руководителя, он подписал и выдал мне все необходимые документы с печатями и подписями для предоставления учебного отпуска (60 календарных дней в год с сохранением среднего заработка*, порядка 200 р. в месяц!!!) с от-

---

*). Если пересчитать в нынешние цены, то не менее $ 300-400. Для срав-

крытыми датами. Я оправдал его доверие и не подвел ни его, ни факультет.

В 1974 году на третьем году обучения в заочной аспирантуре по кафедре теории управления я делал доклад по результатам своих исследований “Двухканальная следящая система”. Были уже и публикации (статьи и тезисы докладов на конференциях достоточно высокого уровня), и заявка на изобретение. В.И. Зубов сделал существенное замечание: “Владислав Тарасович, Вы по какой кафедре были студентом и какого факультета?” Все. Точка. После доклада и в этот раз Николай Ефимович “поддержал” меня. В течении буквально 15 минут мы определили все “узловые” (слабые) места сугубо технической теории синтеза следящих систем и обратили внимание на сингулярность фильтров Р. Калмана. Отмечу, что вопросами теории вероятностей и теории калмановской фильтрации Николай Ефимович ни до этого, ни после никогда не занимался. Однако его эрудиция и интуиция помогали многим. Через два месяца я уже обсуждал с В.И. Зубовым основы новой теории “Аналитического конструирования оптимальных фильтров”.

В 1975 году на последнем четвертом году обучения в заочной аспирантуре перед выступлением на кафедре с предзащитой диссертации Николай Ефимович спросил: “Какой состав преподавателей факультета на доклад тебя, Владислав, устраивает ? Чтобы хвалили или ругали ?” В этом тоже был весь Н.Е. Кирин, тонкий психолог человеческих душ. При этом я четко понимал, что от моего ответа зависят лишь наши личные отношения, а не защита диссертации. Конечно был выбран второй вариант, после которого, как говорят, “дрожали колени”. Николаю Ефимовичу мой выбор понравился - “тяжело в учении, зато легче в бою”. Дал ряд советов, как держатся на защите и отвечать на “острые” вопросы. К моему сожалению, на факультете совет по защите диссертаций вскоре был закрыт. Защита состоялась в 1978 году на новом совете по защите докторских и кандидатских диссертаций по спецтематике.

В последующие годы Н.Е. Кирин активно поддерживал мои дальнейшие исследования и оказывал всестороннюю помощь в организации защиты докторской диссертации. Например, в 1994 - 1995 годах он с согласия В.И. Зубова организовал мне мощную документальную поддержку, направленную в Витебский государственный

нения, сейчас докторанская стипендия составляет всего лишь $ 35, а зарплата доцента — $ 110.

университет им. П.М. Машерова, благодаря которой я первым (без докторской степени) в том университете был избран по конкурсу (единогласно) на должность профессора кафедры геометрии и математического анализа.

Работая над макетом данного сборника статей, посвященных светлой памяти Николая Ефимовича Кирина, и читая воспоминания всех его друзей, соратников, учеников, родных и близких ему людей, я чувствую душой и сердцем — какого замечательного

Ч Е Л О В Е К А

мы все потеряли и как он был бы нужен здесь всем и сейчас.

Г.М. Хитров

СВЕТЛОЙ ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА НИКОЛАЯ ЕФИМОВИЧА КИРИНА

В начале 1967 года группа студентов мат-меха, специализировавшаяся по направлению автоматическое регулирование под научным руководством Ершова Бориса Александровича, после командировки последнего за границу для работы в ЮНЕСКО, почти в полном составе перешла под научное руководство Владимира Ивановича Зубова. Этот переход был сделан по рекомендации самого Бориса Александровича. Владимир Иванович к тому времени был уже известным профессором, вокруг которого собралась группа молодых талантливых ученых, которая и составила впоследствии ядро профессорско-преподавательского состава факультета ПМ-ПУ.

Вместе с этой группой перешел к Владимиру Ивановичу и я. Переход под другое научное руководство, как и переезд на новую квартиру, - дело хлопотное, поскольку сопряжено с некоторыми метаниями и размышлениями. Мы понимали, что Владимир Иванович, занятый большой научной работой, передаст непосредственное руководство каждым конкретным студентом одному из своих сотрудников, и поэтому старались навести о последних справки и собрать слухи.

Студенческая молва выделяла тогда в окружении Владимира Ивановича молодого и талантливого Николая Ефимовича Кирина.

Хотя круг научных интересов Николая Ефимовича был другим, по сравнению с тем, что привлек меня к Ершову, я все же решил просить Николая Ефимовича взять меня под свое научное руководство. Выслушав меня внимательно, Николай Ефимович все же посоветовал мне идти под непосредственное научное руководство Владимира Ивановича, как выдающегося специалиста именно в области теории автоматического управления. Так я оказался под научным руководством Владимира Ивановича, а дипломную работу писал под руководством тогда тоже молодого Евгения Яковлевича Смирнова.

Вполне возможно, что судьба могла развести меня с Николаем Ефимовичем еще дальше, если бы я не был оставлен для продолжения обучения в аспирантуре по только что созданной кафедре теории управления, которую возглавил Владимир Иванович.

Столь длинное вступление мне понадобилось для того, чтобы сказать, что я не был непосредственным учеником Николая Ефимовича и даже круг наших научных интересов был различным. Но, оказавшись в аспирантуре, а затем и на образованном Владимиром Ивановичем факультете ПМ-ПУ, судьба постоянно сталкивала меня с этим незаурядным талантливым человеком - Николаем Ефимовичем Кириным.

Николай Ефимович был ближе к нам по возрасту, обременен, к моменту нашего знакомства, меньшими научными степенями, имел добрую душу, общительный характер и поэтому общение с ним было достаточно простым. Сначала за глаза, а затем нередко и прямо, мы называли его просто Колей. Удивительно, что такое обращение никогда не доходило до панибратства. Мы всегда испытывали по отношению к нему некий пиетет, уважение к его математическому таланту, его авторитету. А он и впрямь заслуживал этого. Вспоминая свои аспирантские годы, я постоянно в своих воспоминаниях натыкаюсь на Николая Ефимовича.

Аспирантура - это годы самостоятельного исследовательского труда и уже сознательного отношения к науке, к богатому багажу накопленного прошлыми поколениями ученых именно в интересующей тебя области. Обучение разделялось как бы на два направления: одно направление - это ликбез в общей математической культуре. Для нас это были труды А.М. Ляпунова, которые мы осваивали самостоятельно, организуя собственные аспирантские семинары. Второе направление - это освоение передового фронта того раздела науки, которое и определяло лицо научного коллектива, объединенного под названием факультета ПМ-ПУ. Правда, было и третье направление - это работа над темой диссертации, ради чего и шло обучение в аспирантуре. Здесь аспирант работал, большей частью, самостоятельно или совместно со своим научным руководителем. Если в третьем направлении я работал под руководством Е.Я. Смирнова, то в первых двух направлениях воспоминания связаны именно с Николаем Ефимовичем. На наши аспирантские семинары он приходил незаметно, как слушатель, и вступал в обсуждение именно там, где мы действительно сталкивались с трудностями, тактично помогая нам преодолевать их. По второму направлению он сам был основателем и руководителем семинара.

Память выхватывает лето 1969 года, т.е. время, когда у меня закончился первый год обучения в аспирантуре. Тогда для аспирантов и молодых сотрудников была организована летняя школа в Сиверской. В течение, кажется, целого месяца мы жили в Сиверской, с 9 часов утра и часов до двух или трех дня мы проводили семинары, затем обед и активный отдых. Именно оттуда у меня и уважение к математическому таланту Николая Ефимовича, именно там я учился не только получать знания, но и применять их, слушая Николая Ефимовича и не только его одного.

После завершения работы летней школы, вспоминаю организованный Николаем Ефимовичем лодочный поход от Толмачева до озера Череменецкого. Все было удивительно в этом походе: и прокладка маршрута, и организация похода вплоть до мелочей. Мы нашли необходимые нам две лодки нужного качества без всяких проволочек. Оказывается, Николай Ефимович съездил к хозяину лодок заранее и договорился. Выезжая из Сиверской к пункту начала похода - станции Толмачево, вероятно, по причине спешки, мы не успевали купить проездные билеты. Как всегда в таких случаях, неожиданно в поезде оказались контролеры. Каково же было наше удивление, когда Николай Ефимович предъявил на всех нас полный комплект билетов. Удивительно потому, что он был с нами и не отлучался от коллектива, кажется, ни на минуту.

Вспоминаю рождение моего сына. Я объявил об этом моим коллегам не где-нибудь, а на семинаре Николая Ефимовича. Как рождение моего сына, так и защиту докторской диссертации Николая Ефимовича, состоявшейся позже, мы праздновали вместе. Этим я только хочу сказать, что во всех наиболее важных событиях в моей и его жизни, мы оказывались вместе. И это несмотря на различие наших научных интересов, несмотря на то, что я не относился к кругу его учеников или ближайших друзей. Просто Николай Ефимович был таким человеком. Было в нем что-то такое, что тянуло к нему. Вероятно, поэтому его любили женщины, хотя волокитства с его стороны я никогда не замечал.

Позже, занимаясь сознательно историей факультета, я в своих изысканиях снова постоянно наталкиваюсь на Николая Ефимовича. Оказывается, он самый молодой из членов учредительного совета факультета ПМ-ПУ - он секретарь этого совета. Когда же решался вопрос о переводе факультета из Ленинграда в Петродворец, Николай Ефимович был парторгом факультета. То, что он дал тогда свое согласие на переезд, часто ставят ему в вину. А мог ли он не дать согласие, когда была партийная дисциплина, когда в обкоме партии решили, что факультет должен переезжать? Здесь скорее важно другое - Николай Ефимович не рядовая фигура, а ключевая - человек принимающий решение. Трагедия таких людей состояла в проецировании внешнего конфликта во внутренний. Очевидно, наилучшее для факультета и для дела, ради которого факультет был организован (научное обслуживание промышленности), местонахождение факультета ПМ-ПУ именно в Ленинграде вступало в противоречие с решением властей о переводе университета в Петродворец. Это внешнее противоречие.

Внутренне противоречие состояло в том, что ради выполнения решения властей (решения о переводе факультета в Петродворец), Николай Ефимович должен был вступить в конфликт с основателем факультета Зубовым Владимиром Ивановичем, который к тому времени уже не был деканом, но оставался, и это надо отметить, до конца своей жизни признанным авторитетом. А это значит - вступить в конфликт с самим собой. Николай Ефимович как никто другой, понимал выгоды местоположения факультета в Ленинграде. Пусть простит меня читатель, что я касаюсь этой темы, но я должен и для себя и для читателя объяснить, почему так рано, в мае 2000 года, на 62 году от рождения, ушел из жизни Николай Ефимович. Я не говорю, как он ушел, я говорю о причинах - это внутренние противоречия. Мои коллеги могут заметить мне, что между Кириным и Зубовым не было противоречий. И это тоже - правда. Примером и мои личные воспоминания. Когда я короткий промежуток времени был членом парткома университета, Владимир Иванович просил меня беречь Николая Ефимовича, поскольку это один из лучших людей на факультете. В свою очередь, ничего плохого я не слышал и от Николая Ефимовича о Владимире Ивановиче, восхищение же - да, слышал. Но сказанное означает только, что внутренний конфликт был, и был навязан внешними обстоятельствами.

Другой причиной внутреннего конфликта была, конечно, грянувшая в стране перестройка. Развалив страну и разрушив производство, это событие не могло не затронуть науку вообще и, в первую очередь, прикладную науку, тесно связанную с производством. Можно было бы заметить, что как профессор университета Николай Ефимович не голодал, что кроме науки у него была преподавательская работа: ему было чему служить. И это - правда, но правда и другое. Выше я пытался показать, каким чутким преподавателем был Николай Ефимович. И, именно, поэтому он не мог не обратить внимание на то, что временно факультет готовит кадры в никуда. Спасала наших выпускников лишь широта образования, а отнюдь не специализация, которую мы давали. Это тоже не могло не отразиться на душе Николая Ефимовича. Будь он попроще, будь он менее душевным человеком, он жил бы несравненно дольше, поскольку обладал завидным здоровьем. Но тогда вряд ли захотелось бы что-нибудь написать о нем. Душевность же вела к внутреннему конфликту, к русской хандре и к ее обычному исходу.

Мне печально самому, что таким образом я кончаю эти воспоминания. Но, я не стал бы этого делать, если бы не видел некоторого оживления дел в стране и, в первую очередь, в промышленности. Вслед за промышленностью потихоньку стала оживать и прикладная наука, к тому же у факультета появляется свое здание. Значит, снова наша деятельность приобретает смысл. Значит, нам снова нужны такие чуткие и добрые преподаватели и руководители, как Николай Ефимович Кирин, к светлой памяти которого я и обращаюсь.

Амандос Суранчиев

ВОСПОМИНАНИЯ ОБ УЧИТЕЛЕ

Я никак не забуду свое первое посещение лекции Николая Ефимовича. Это было на третьем курсе. Тогда я только перевелся на третий курс из Казахского госуниверситета имени С.М. Кирова (Алматы). Этот случай мне также дорог тем, что было это мое первое занятие в стенах Ленинградского университета. До этого В.Ф. Кузютин (в то время зам. декана) спросил меня: “Какую кафедру ты выбираешь?”. Я ответил: “Последнюю по порядковому номеру”. Это была кафедра численного анализа (ЧА) руководимая Н.Е. Кириным. Сидим, значит, на лекции, спрашивает вдруг лектор у меня: “А, Вы с первого курса у нас?”. Я объясняю, что приехал из КазГУ (сокращенное название нашего республиканского первого вуза) по целевому направлению. Он тут же добавляет: “Ну, конечно, я хорошо знаю про Казанский университет с богатой историей...”. Я сразу же поправляю его: “Нет, это Казахстанский университет”. Он как-то призадумался, но ничего не сказал.

В перерыве Николай Ефимович подходит ко мне и тепло говорит: “Я как-то сразу не подумал, что вы из Казахстана, поэтому Вы меня простите, молодой человек”. Мне самому стало неловко и дальше разговор не получился бы, но он начал меня расспрашивать о моих планах, о том, чего мне хотелось бы побольше изучать в университете. И мы живо разговорились. С этого момента и до конца моего пребывания в альмаматере у нас сложились хорошие взаимоотношения...

И.В. Березинец

ВСТРЕЧА В АКАДЕМИИ

Закончились пять лет учебы на любимом факультете, три года аспирантуры и началась другая жизнь — жизнь преподавателя на кафедре математики в военной инженерно-космической академии имени А.Ф. Можайского. Именно на этой кафедре, спустя пятнадцать лет после окончания университета, мы опять встретились с Николаем Ефимовичем Кириным.

На кафедре, которой в течение 33 лет заведовал Сергей Михайлович Лозинский, был собран замечательный коллектив талантливых педагогов. Для того, чтобы поддерживать уровень преподавания на таком же высоком уровне как и в былые времена, в 2000 году было принято решение приглашать для чтения некоторых дисциплин ведущих педагогов города. Это было сделано для того, чтобы у педагогов кафедры была возможность повысить свою квалификацию, познакомиться с современными тенденциями и методиками преподавания. Для чтения курса лекций “Вычислительная математика” было принято однозначное решение пригласить Николая Ефимовича, а мне было поручено передать ему приглашение кафедры. Звонок педагогу, которого не видела пятнадцать лет и в ответ поразительная реакция: “Да, Ира, конечно, я Вас помню и с интересом приму Ваше предложение.” Так мы встретились с Николаем Ефимовичем снова.

Удивительной была его реакция и поразительное отношение к тому курсу, которому ему предстояло читать. Во-первых, он узнал кто, что и как читал вычислительную математику на кафедре. К слову сказать, он был приятно удивлен, что долгое время вычислительную математику на кафедре читал Хаим Львович Смолицкий, который в свою очередь, был преподавателем у Николая Ефимовича. Николай Ефимович попросил дать ему всю литературу. выпущенную на кафедре по вычислительной математике, учебные прграммы и тематические планы. Только после ознакомления со всеми этими материалами он приступил к чтению курса.

В его планах было поставить практический курс, подкрепленный лабораторными работами. Мы все с интересом ходили слушать его лекции, сравнивали с тем, что он нам читал в университете, обсуждали, что из его идей будем использовать в работе. Николая Ефимовича очень хорошо принял коллектив кафедры, он был всегда уважителен и доброжелателен ко всем.

К нашему глубокому сожалению, Николай Ефимович не успел дочитать этот курс, его не стало, но он оставил о себе добрую память среди курсантов и преподавателей академии.

К.Ш. Ермеккалиев

ОДНАЖДЫ И НА ВСЮ ЖИЗНЬ

С Н.Е. Кириным я познакомился в 1985 году будучи студентом 3 курса. Он читал нам лекции по численным методам. Среди нас студентов Николай Ефимович считался одним из “зубров”, столпов на которых держится наука. Мы с большим уважением относились к нему как к личности, которая олицетворяет цвет нашего факультета прикладной математики - процессов управления. Его лекции отличались доступностью в понимании сути задач, оригинальностью их решений, простотой изложения.

Изучение задач по стабилизации по неполной обратной связи привело меня к тому, что Николай Ефимович пригласил меня поработать под его руководством в аспирантуре. На кафедре "Численных методов", руководимой профессором Кириным Н.Е., я более тесно соприкоснулся с его коллегами, моими бывшими преподавателями, Позняком Л.Т., Михеевым С.Е., Ивановым А.П., познакомился с его бывшими и работающими под его руководством аспирантами. Три года я был в кругу увлеченных своей работой людей. У нас проходили различные научные семинары, доклады, мы участвовали в конференциях. И где бы мы, его ученики-аспиранты, не выступали или докладывали в Свердловске, Минске и т.д., узнав имя руководителя работ профессора Кирина, слушатели понимали, что работа серьезная и докладчик стоит внимательного отношения к его работе. Настолько было уважение к Николаю Ефимовичу со стороны коллег.

Мы, бывшие его студенты, аспиранты, ученики, благодарны Николаю Ефимовичу Кирину, Профессору с большой буквы, за его доброжелательное отношение к нам, за его поддержку в трудные минуты и знания, которые он нам передал.

РАЗДЕЛ V

ПРИМЕРЫ ЛИТЕРАТУРНОГО ТВОРЧЕСТВА Н.Е. КИРИНА

* * *

Весна! Весна! Осенний дождик!
И снегогрязевая смесь!
Прохожий спрятался под зонтик,
И это очень странно здесь.

Не разберёшь, что за погода:
Осенний дождь, весенний свет.
И старики такого года
Не могут вспомнить за сто лет.

Журчит вода, стекает с крыши,
Осел весенний чёрный снег,
И веселей щебечут птицы,
Весне шля радостный привет.

Но выйди вечером: дождь, слякоть,
Сквозь тучи чуть глядит луна,
Готовая вот - вот заплакать...
Без звёзд не может жить она.

Скользят прохожие мостками,
Машина грязью шелестит,
И, громко шлёпая ногами,
Студентик без пальто бежит.

И это всё сквозь мрак вечерний
Под светом редких Фонарей
Я внемлю грохот равномерный
Полуторок и москвичей.

04.1954 г. 23 ч.

* * *

Сыро, погода осенняя
(Даром, что лето стоит).
Весь день за немытыми окнами
Ветер листвою шумит.

Серые тучки сокрыли
Солнце и свод голубой.
Ночь и до полдня кропили
Странницы землю водой.

Скука. В натопленной комнате
Жарко и хочется спать.
После обеда тяжёлого
Начал я носом клевать.

Глянул на хмурую улицу:
Дождик без устали льёт,
Ветер холодный гуляет,
Редко пройдёт пешеход.

Клонит ко сну всё сильнее
Сон, наконец, одолел.
Лень было со стула подняться
Тут и заснул, где сидел.

9.07.1955

* * *

Прошли былые времена,
Остались только письмена.
Был мир, потом была война...
Там пал монарх, а там страна...
И всюду новы имена
Преемлет каждая страна.

9.04.1956

* * *

Удивительно быстро погода сменилась
Необьятное, чистое небо открылось.
Солнце на землю, жар посылая,
Сушит улицы, чистит для Мая.

И теперь по сухой мостовой
Можно в школу ходить нам с тобой.
И просторнее как-то вдруг стало
Иль от солнца, что ярко сияло.

Наряжёно всё в яркие краски,
Чтоб всё было праздничным майским
Иль от снега, что стаял с дороги
Хоронясь лишь в тени, как в берлоге.

Вот и вечер. Под яркой луною
Дремлет город за мёртвой рекою...

24.04. 1956

НАСТРОЕНИЕ, ВЫЗВАННОЕ СОЗЕРЦАНИЕМ

Тёплый ясный день сегодня,
В небе всё голубизна.
Ветерок хороший, тёплый,
Словно поздняя весна.

Но за ярким блеском солнца,
За приятным ветерком
Слышен шум листвы деревьев,
Говорящий о другом.

Шум их грустный, беспрестанный,
Завывающий порой
Говорит мне неустанно:
“Всё прошло, приятель мой,

Красно лето пролетает,
И давно прошла весна.
Дни бегут, минуты тают,
Так проходят времена.”

Не такой теперь уж воздух
Какой был тогда, весной,
И в лугах больших, колхозных
Пахнет скошенной травой.

Не шумит младой листвою,
Не звенит весельем птиц
Лес. Скучающей стеною
На природу он глядит.

О ветер, ты всему причина,
Ты развеваешь аромат,
Собираешь облако из дыма,
Разносишь влагу, смрад и хлад.

1956

* * *

Уж четверть века позади.
Чего достиг? Где след оставил?
Какого идола прославил?
Чему служил? Зачем лукавил?
И что наметил впереди?
Да, жизнь не просто обьяснить,
Ещё трудней пути предвидеть.
Где есть, где пить, где ненавидеть
Где пот пролить, где не обидеть
И всюду: быть или не быть?
Жизнь как звенящий ручеёк
Едва заметно... и впереди ещё не знает
Какие камни на пути
Ему придётся обойти
И что случится с ним пока
Ему не встретится река,
В которой канет без следа,
Умолкнув песней навсегда.
“Но разве чистая вода
Нам не напомнит иногда
Что где-то ручеёк играет”...

г. Долгопрудный, 06.64

* * *

А мы не знали, да не гадали,
Ни от кого не слышали,
Что будем летом мы на Урале
И поплывём по Вишере.

Сначала поезд пускал колечки,
А мы по полкам терлися.
Ой, далеко нам до нашей речки
Зачем мы к ней попёрлися?

Больше привалов, чем перевалов
(Все перевалы, чуть что - привалы)
И впереди гора Мартай.
Ой, поту много, а толку мало,
А ну-ка "Дуй, Шулак, давай!"

Вот на чувале заночевали,
Нас истязали пауты.
Пока рубили, потом сплавляли,
А после делали плоты.
Что за местечки у нашей речки
....
Всё перекаты, да перекаты
На вахте Шулаков не спит...
Но что за пакость, плот сикось - накось
И уж на камушке сидит.

Пошли денёчки, поплыли ночки
И помутнела Вишера,
Тушонку съели, всё перепели
И расставаться нам пора.

Вновь перевозки, да пересадки,
Да перекуски редкие.
Вновь переноски, да перетаски,
Да неувязки мелкие.

1964 г.

ПИСЬМО

Мне очень жаль, мне жаль до слёз,
Что этот каверзный колхоз
Оставил Ригу в сфере грёз
И радость встречи с Вами.

Но ещё больше, чем колхоз,
Большой финансовый вопрос
Расширил эту сферу грёз
Пятнадцатью рублями.

Что тут поделаешь!? Увы!
Но если б на брегах Невы
Пролётом оказались Вы?!
Чем это не реально?

Роскошный рощинский сарай
Вместил бы Ваш семейный рай
Да в крыше ль дело! ...
Конечно оптимально.

Тебе ещё я не писал
О том, где нынче побывал
Так вот: на Северный Урал
Катался с москвичами.

Четыре дня горами шли,
На пятый к речке приползли,
Где дни в работе провели,
Воюя с комарами.

И вот построены плоты,
Сбылись желанные мечты.
Быстра река, длинны шесты,
Игривы перекаты.

Красивы камни - берега,
Приятна издали тайга
Не будь лишь овода-врага
Здесь тварью край богатый.

Чудесны воздух и вода
И не беда, что овода
Нас отвлекали иногда
От сна иль ликованья.

Всего не мыслю рассказать
Мораль одна: пойду опять...
P.S. Прожекты составлял:
Тянь-Шань, Алтай или Байкал...

1964 г.

* * *

Снова осень на пороге,
Дует хладный ветерок.
Я в волненьи, я в тревоге
За текущий ныне рок.
....
....
Снова осень на пороге
И берёзы у окна
Знать даёт, что я в дороге
Той, что жизнью названа.

1964 г.

* * *

Борису Константинычу привет!
Сижу в час поздний на досуге
И тужусь сочинить куплет
По поводу январской вьюги.
Погода нынче странная весьма,
Бросает градусник то в жар, то в холод.
Под Новый Год едва дошла зима
И обнаружили на снег и яйца голод.
Куда ни глянь, везде спешит народ
И давка в транспорте с утра до позней ночи,
Должно быть это юбилейный год
Особенное что-то сделать хочет.
И надобно сказать ему кой - что неплохо удаётся.
Ты уж слыхал про факультет ПМ-ПУ?
Ну и ещё кой - что услышать доведётся.
Мне лично от особенностей сих
Хлопот напрасных снова подвалило,
И видя целостность движения других
Теряешь больше ... Где судьбы мерило?!
Неторопливый ритм, обед в известный час.
Куда приятней нам - пингвинам.
Цивилизация науки не для нас
Мы любим жить по персональным льдинам.

4.1.1970

* * *

Николай Ефимычу 38 лет.
Заказал в "Астории" праздничный обед.
Ели осетрину, пили коньяки
А потом в обнимку плясали гопаки.
Все друзья в восторге, кушай - не хочу
Пей, за все уплачено или доплачу,
Перед каждой рюмкой тосты говорят...
Годики, вы годики, годики летят.

1979

* * *

Что-то думаю о прошлом:
Зря прожито или нет?
Может вы дадите, братцы,
Справедливый мне ответ.

Если жизнь была ошибкой,
Прокатилась стороной,
Эта правда будет горькой -
Мне никто не даст другой.

Всё не так уж, знаю, гладко
(Были рытвины, ухабы)
По трясине путь лежал.
Всё равно без остановки
К этой дате приближал.

Я ещё не ставлю точку,
К заключенью не спешу.
Может быть на том листочке
Поскладнее напишу.

А теперь мы скажем просто
Без особых громких тостов:
Выпить рюмочку, не грех
За здоровье и успех.

* * *

С днём весенним, с днём прекрасным
С треволнением напрасным
К славной дате подходя
Поздравляем мы тебя!

Для цветов и блиц улыбки
Видим повод мы не зыбкий -
Как тебя не поздравлять -
Ты, во - первых детям мать.

В нулевых ты мне - жена
(В чёрной юбке сатана)
И, скажу напрямоту,
Ты - кормилица коту.

Ты - заботливая дочь,
Рада тётушкам помочь,
Дальним братьям и сестре
И соседям во дворе.

Вся в заботе на работе,
У коллег в большом почёте.
И, конечно не без мук -
Кандидат физ. - мат. наук.

Но штрихи в твоём портрете
Можно видеть только в свете
Страсти страшной как недуг -
Ты ужасный книголюб!

Мы, теснясь в своей квартире,
Стонем, тонем в книжном мире
Ради будущих колен
Неизвестных перемен.

Завершая шарж с натуры
Образцом макулатуры,
Тихо в кухню уходя,
Поздравляем мы тебя!

Н.И. *Н.Е.*

* * *

До весны еще далеко,
Но в лазури голубой
Видит страждущее око
Зелень первую весной.
Чу! в ветвях окоченелых
У березы и сосны,
В скорлупе сугробов белых
Зреют птенчики весны.
Что-то чудное таится
В искрах снежных, и не зря.
До весны кой - кто родится
В середине января.
Дорогой, Сергей! Поставить
Должен я здесь ноту “Ре”.
И теперь тебя поздравить -
Ты родился в январе.
А сейчас это не важно ....
Пусть богатый содержаньем
Этот месяц, видя сны,
Не задержит ожиданьем
Неминуемой весны.

ДОКУМЕНТАЛЬНАЯ ПЕСНЯ КОЛИ КИРИНА

(С “подорожной песней” на мотив тюремной песни
“если не знаешь - дальше не пой”.)

Пошли к чертям зачёты и отчёты,
Игра в дела мартышкой на трубе.
Пусть подождут семейные заботы
Я еду, моя Родина, к тебе!

Не знаю где, когда ,чего и сколько
Пошлёт мне бог - я верю в чудеса!
Как дева жду судьбы и знаю только,
Что новая открылась полоса!

Наш старый дом у древнего собора
Увижу я над Вологдой рекой
И тополя большие вдоль забора,
И церковушек звонкоглавый рой.

Череповец в дыму и рыжей глине
Плывёт в окне верстою за верстой?
И мнится мне, что где-то в середине
Простёрся лен кудрявой полосой.

Я вновь пойду базарным переулком,
Где в 45-м цирк шатром стоял.
Я слышу - слышу в перестуке гулком
Всё ближе, ближе Родина моя.

Леса, поля, да серые туманы.
Угор под пашней, травы под косой.
Коровы той травой под утро пьяны
И жизнь течёт молочной полосой.

Привет, вокзал ! Здорово, золотуха !
Иду без ног, как душенька в раю.
Ты узнаёшь ли, Родина, Кирюху?
А я тебя так точно узнаю!

Здесь был базар, а это наша школа.
И чудятся родные голоса
Но где теперь звонок её весёлый,
Где детства золотая полоса?

И вот стою я на соборной горке.
Вот тополя как деды над рекой.
Но вместо дома, на былом задворке
Скамеечка поросшая травой.

> Чу... запах сена, как намёк на осень,
> Дрожу как лист осиновый в лесу,
> Сейчас от "чуйства" превращуся в озимь!
> Иль в эту голубую полосу!

Опять стучат знакомые колёса.
Как Лев Толстой всю ночь бегу босой,
И больше нет сомненья иль вопроса
Бегу другой неровной полосой.

г. Вологда 19.08.84

РАЗДЕЛ VI

ФОТОГРАФИИ